现代数学基础丛书 93

模李超代数

张永正　刘文德　著

科学出版社
www.sciencep.com

(O-2047.0101)

ISBN 7-03-014009-5

9 787030 140098 >

ISBN 7-03-014009-5

定 价：29.00 元

内 容 简 介

本书主要讨论 Cartan 型模李超代数，其中包括作者近年来在模李超代数方向上的研究成果. 书中构造了四类 Cartan 型模李超代数，讨论了李超代数的结合型与深度 1 的 $\mathbb{Z}$-阶化李超代数，介绍了形式向量场上的两类无限维的 Cartan 型李超代数.

本书可作为数学系、计算机系的研究生读物，也可供相关专业的大学生、研究生、教师以及有关的科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

模李超代数/张永正，刘文德著. —北京：科学出版社，2004
(现代数学基础丛书;93)
ISBN 7-03-014009-5
Ⅰ.模… Ⅱ.①张… ②刘… Ⅲ.李代数 Ⅳ.O152.5
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 075889 号

责任编辑：吕 虹 张 扬／责任校对：钟 洋
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2004年9月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2004年9月第一次印刷 印张：12 3/4
印数：1—3 000 字数：234 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约40卷，后者则逾80卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献．

杨　乐

2003年8月

前 言

在物理学中, 为了建立相对论的费米子与玻色子的统一理论, 1974 年 Wess 和 Zumino 提出了超对称性, 将普通时空满足的 Poincarè 李代数(即非齐次 Lorentz 代数)扩充为超 Poincarè 代数. 于是将有限个具有不同内部量子数的玻色子与费米子放在李超代数的一个不可约表示中, 从此关于李超代数的研究有了迅速的发展. 从数学的角度来看, 在非模的李超代数(即特征零的域上的李超代数)的研究中, 具有里程碑意义的结果当属 V.G.Kac 于 1977 年完成的特征零代数闭域上有限维单李超代数的分类. 现在, 非模李超代数的研究已经取得了相当系统的结果. 于是自然地考虑到模李超代数(即素特征域上的李超代数) 的情况. 但是, 由于基础域的特征数不同, 非模李超代数的主要研究方法不能转移到模李超代数. 因此不能相仿于非模的情形研究模李超代数.

我们知道, 自从 1968 年 A.I.Kostrikin 的文章发表以后, 模李代数(即素特征域上的李代数) 的研究有了长足的发展. 经过多位数学家几十年的共同努力, 特别是 H. Strade 的杰出工作, 最终于 1989 年完成了特征数大于 7 的代数闭域上单的有限维李代数的分类. 至今, 模李代数已经有了丰富的理论. 尽管模李代数与模李超代数有很大的差异, 但是模李代数的理论为模李超代数的研究提供了考虑问题的方法和途径, 从而我们进行了模李超代数的某些研究工作. 本书主要反映了作者近年来在模李超代数方向上的研究成果.

目前模李超代数的研究仍处在前期的发展阶段, 研究结果较少, 尚无模李超代数的专门书籍. 现根据我们的工作撰写了这本书. 因为非模的李超代数与模李超代数的差别在于 Cartan 型代数, 所以本书主要讨论 Cartan 型模李超代数.

本书共分六章. 第一章首先介绍了本书所需要的基本概念.然后通过刻画除幂代数与外代数的张量积的特殊导子, 构作了四类有限维 Cartan 型模李超代数. 它们的 $\mathbb{Z}$-阶化与 $\mathbb{Z}_2$-阶化是不相容的, 在非模的情形不存在这样的有限维Cartan 型李超代数.

第二章证明了四类有限维 Cartan 型模李超代数的单性. 进而分别确定了它们的导子超代数.

第三章构造了任一李超代数到 W 型李超代数的同态, 从而得到了任一单李超代数均同构于 W 型李超代数的一个子代数. 进而, 本章证明了四类 Cartan 型模李超代数的滤过不变性, 于是得出定义它们的整数 m, n 与 m 元整数组 $\underline{t}$ 是内蕴的.

第四章讨论了有限维李超代数的结合型. 首先讨论了单李超代数的结合型,进而刻画了单的 $\mathbb{Z}$-阶化李超代数的结合型, 之后确定了 Cartan 型模李超代数的结合型, 并且证明了有限维李超代数的任一表示的迹型必为偶的结合型.

第五章证明了深度 1 的 $\mathbb{Z}$-阶化李超代数的嵌入定理. 利用嵌入定理, 通过旗的方法确定了底部分别为一般与特殊线性李超代数的具有可迁 $\mathbb{Z}$-阶化的模李超代数.

第六章讨论了深度 1 的 $\mathbb{Z}$-阶化模李超代数的表示, 首先将沈光宇的混合积的方法推广到李超代数. 从而构造了 W, S 与 H 型李超代数的阶化模, 并且给出了 H 型李超代数的阶化模为不可约模的一个充分条件. 讨论了 V. G. Kac 在 1998 年分类无限维的线性紧致单李超代数中的两个重要的例子: 形式向量场的一般与特殊李超代数. 目的是使读者看到 ad-拟幂零元在 $\mathbb{Z}$-阶化李超代数研究中的作用.

由于有限维的单的非模李超代数的分类早已解决, 所以, 有限维的单的模李超代数的分类就成为重要的研究课题. 我们希望本书构造的四类有限维 Cartan 型模李超代数、嵌入定理以及利用底部确定 $\mathbb{Z}$-阶化模李超代数等结果能为有限维模李超代数的分类起到抛砖引玉的作用. 除了分类问题之外, 模李超代数的表示也有许多重要问题需要解决. 我们知道限制李超代数是满足特定条件的模李超代数. 限制李超代数的结构、分类与表示也都有相当大的研究空间. 我们还希望本书能够成为研究以上诸问题人员的有益的参考书.

最后, 作者对哈尔滨师范大学优秀专著出版基金为本书的资助表示感谢.

作 者

2004 年 6 月

目　录

第一章　Cartan 型模李超代数的构作 ······ 1
§1　基本概念 ······ 1
§2　Cartan 型模李超代数的构作 ······ 8
第二章　单性与导子超代数 ······ 26
§1　单性 ······ 26
§2　导子超代数的 $\mathbb{Z}$-阶化 ······ 30
§3　W 与 S 的导子超代数 ······ 35
§4　H 的导子超代数 ······ 48
§5　K 的导子超代数 ······ 62
第三章　同态实现与不变滤过 ······ 72
§1　同态实现 ······ 72
§2　W 与 S 的自然滤过 ······ 83
§3　H 的自然滤过 ······ 92
§4　K 的不可缩滤过 ······ 100
第四章　李超代数的结合型 ······ 108
§1　单李超代数的结合型 ······ 108
§2　单 $\mathbb{Z}$-阶化李超代数的结合型 ······ 112
§3　Cartan 型模李超代数的非退化结合型 ······ 118
第五章　深度 1 的 $\mathbb{Z}$-阶化李超代数 ······ 126
§1　嵌入定理 ······ 126
§2　利用底部确定 W 型与 S 型李超代数 ······ 138
第六章　阶化模 ······ 159
§1　混合积 ······ 159
§2　H$(m, n, \underline{t})$的阶化模 ······ 164
§3　形式向量场的一般与特殊李超代数 ······ 171
参考文献 ······ 182
索　引 ······ 188

*　　*　　*

《现代数学基础丛书》出版书目 ······ 189

第一章　Cartan 型模李超代数的构作

§1　基 本 概 念

本节主要介绍基本概念. 在本节中, 基域 $\mathbb{F}$ 的特征数可以是任意的. 我们知道, 域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 A 称作 $\mathbb{F}$ 上的代数, 如果除了数乘和 A 的加法运算外, A 还有一个乘法运算 (用 xy 表示 x 与 y 的乘积, $\forall x, y \in A$), 并且满足以下条件:

1) $x(y+z) = xy + xz,\ \ (y+z)x = yx + zx,$

2) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y),\ \forall x, y, z \in A,\ \forall \lambda \in \mathbb{F}.$

如果代数 A 是 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间, 则称 A 为 $\mathbb{F}$ 上的有限维代数.

如果代数 A 的乘法满足结合律, 则称 A 为结合代数; 如果代数 A 的乘法满足交换律, 则称 A 为交换代数.

如果代数 A 的乘法满足以下条件:

1) $x^2 = 0,\ \forall x \in A,$

2) $x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0,\ \ \forall x, y, z \in A,$ (Jacobi 等式),

则称 A 为李代数.

在本书中, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ 与 $\mathbb{N}_0$ 分别表示整数集、止整数集与非负整数集, $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}; \bar{1}\}$ 表示整数模 2 的剩余类环. 设 A 是 $\mathbb{F}$ 上代数, 并且 A 还是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化线性空间, 即 A 可分解为子空间的直和: $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$. 如果 $A_\theta A_\mu \subseteq A_{\theta+\mu},\ \forall \theta, \mu \in \mathbb{Z}_2$, 则称 A 是 $\mathbb{F}$ 上的超代数. 同样, 若超代数 A 的乘法适合结合律, 则称 A 为结合超代数.

若 T 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 的子集, 则本书用 $\mathrm{span}_{\mathbb{F}}T$ 表示由 T 张成的 V 的子空间.

例 1.1　*设 $\Lambda(n)$ 是由变元 $x_1, \cdots, x_n$ 生成的有 1 的 $\mathbb{F}$ 上的结合代数, 且满足关系式: $x_i x_j = -x_j x_i$, 其中 $i, j = 1, 2, \cdots, n$, 则称 $\Lambda(n)$ 是具有 n 个变元 $x_1, \cdots, x_n$ 的 $\mathbb{F}$ 上的外代数. 令*

$$\Lambda(n)_{\bar{0}} = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{1, x_{i_1}, \cdots, x_{i_r} \mid 1 \le i_1, \cdots, i_r \le n,\ 2 \le r \le n,\ r\text{是偶数}\},$$

$$\Lambda(n)_{\bar{1}} = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_r} \mid 1 \le i_1, \cdots, i_r \le n,\ 1 \le r \le n,\ r\text{是奇数}\},$$

则 $\Lambda(n) = \Lambda(n)_{\bar{0}} \oplus \Lambda(n)_{\bar{1}}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的结合超代数, 并称如上的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化为 $\Lambda(n)$ 的自然 $\mathbb{Z}_2$- 阶化.

设 $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$ 是超代数, 若 $x \in A_\theta$, 其中 $\theta \in \mathbb{Z}_2$, 则称 x 是次数 θ 的 $\mathbb{Z}_2$- 齐次元素, 并记 $\mathrm{d}(x) = \theta$. 在本书中, 若 $\mathrm{d}(x)$ 出现在超代数的某个表达式中, 则约定 x 是 $\mathbb{Z}_2$- 齐次元素. 当然, 此表达式可按超代数的性质扩张到超代数的任意元素上 (扩张后的表达式的形状可能有所改变). 我们用 $\mathrm{hg}(A)$ 表示超代数 A(或 $\mathbb{Z}_2$- 阶化线性空间 A) 的所有 $\mathbb{Z}_2$- 齐次元素的集合. 显然 $\mathrm{hg}(A) = A_{\bar{0}} \cup A_{\bar{1}}$.

定义 1.2 设 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的超代数, 它的乘法运算用 [,] 表示. 如果

$$[x,\ y] = -(-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}[y,\ x], \quad \forall x, y \in \mathrm{hg}(L), \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}&(-1)^{\mathrm{d}(z)\mathrm{d}(x)}[x,\ [y,\ z]] + (-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}[y,\ [z,\ x]]\\ &\quad +(-1)^{\mathrm{d}(y)\mathrm{d}(z)}[z,\ [x,\ y]] = 0, \quad \forall x, y, z \in \mathrm{hg}(L),\end{aligned} \tag{1.2}$$

则称 L 是 $\mathbb{F}$ 上的李超代数.

我们称 (1.2) 式为阶化 Jacobi 等式. 由于李超代数是超代数, 故 [,] 运算是双线性的.

在定义 1.2 中, 若 $L_{\bar{1}} = 0$, 则 L 就是李代数. 因此, 如不特别声明, 我们总设 $L_{\bar{1}} \neq 0$. 下面我们证明, 以上定义中的 (1.2) 式可由下式代替:

$$[x,\ [y,\ z]] = [[x,\ y],\ z] + (-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}[y,\ [x,\ z]], \quad \forall x, y \in \mathrm{hg}(L), \quad z \in L. \tag{1.3}$$

事实上, 若 (1.3) 式成立, 设 $z \in \mathrm{hg}(L)$, 将 (1.3) 式两边同乘以 $(-1)^{\mathrm{d}(z)\mathrm{d}(x)}$, 利用 (1.1) 式, 即可得到 (1.2) 式. 反之, 若 (1.2) 式成立, 将 (1.2) 式两端同乘以 $(-1)^{\mathrm{d}(z)\mathrm{d}(x)}$, 利用 (1.1) 式同样可知 (1.3) 式对任意 $x, y, z \in \mathrm{hg}(L)$ 成立. 任取 $z \in L$, 可设 $z = z_0 + z_1$, 其中 $z_0 \in L_{\bar{0}}$, $z_1 \in L_{\bar{1}}$, 则有

$$\begin{aligned}[x, [y, z]] &= [x, [y, z_0 + z_1]] = [x, [y, z_0]] + [x, [y, z_1]]\\ &= [[x, y], z_0] + (-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}[y, [x, z_0]]\\ &\quad +[[x, y], z_1] + (-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}[y, [x, z_1]]\\ &= [[x, y], z] + (-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}[y, [x, z]].\end{aligned}$$

所以, 对任意 $x, y \in \mathrm{hg}(L)$, $z \in L$, (1.3) 式均成立.

设 H, K 是李超代数 L 的子空间, 令

$$[H, K] = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{[x, y] \mid x \in H,\ y \in K\}.$$

显然, $[H, K] = \{\sum_i [x_i, y_i] \mid x_i \in H,\ y_i \in K\}$, 这里 $\sum_i [x_i, y_i]$ 表示有限个 $[x_i, y_i]$ 之和. 设 H, K, I 是 L 的子空间, 利用 (1.3) 与 (1.1) 式可得

$$\begin{aligned}[H, [K, I]] &\subseteq [[H, K], I] + [K, [H, I]]\\ &= [I, [H, K]] + [K, [I, H]].\end{aligned} \tag{1.4}$$

定义 1.3 设 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 是李超代数, H 是 L 的子空间, 令 $H_\theta = H \cap L_\theta$, $\forall \theta \in \mathbb{Z}_2$. 若 $H = H_{\bar{0}} \oplus H_{\bar{1}}$, 则称 H 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间.

引理 1.4 以下命题成立.

1) 设 H 是李超代数 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 的子空间, 则 H 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间当且仅当 H 中任一元素 x 均可表为 $x = x_{\bar{0}} + x_{\bar{1}}$, 其中 $x_\theta \in H_\theta$, $\theta \in \mathbb{Z}_2$.

2) 若 H, K 是李超代数 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间, 则 $H+K$, $H \cap K$ 与 $[H, K]$ 也是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间.

证明 由 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间的定义可直接推得 1). 下面证 2).

任取 $x+y \in H+K$, 其中 $x \in H$, $y \in K$. 因为 H 是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间, 故可设 $x = x_{\bar{0}} + x_{\bar{1}}$, 其中 $x_\theta \in H_\theta$, $\theta \in \mathbb{Z}_2$. 同理可设 $y = y_{\bar{0}} + y_{\bar{1}}$, 其中 $y_\theta \in K_\theta$, $\forall \theta \in \mathbb{Z}_2$. 则

$$x + y = (x_{\bar{0}} + y_{\bar{0}}) + (x_{\bar{1}} + y_{\bar{1}}).$$

因为 $x_\theta + y_\theta \in H_\theta + K_\theta = H \cap L_\theta + K \cap L_\theta \subseteq (H+K) \cap L_\theta = (H+K)_\theta$, $\forall \theta \in \mathbb{Z}_2$, 所以, 由 1) 知 $H+K$ 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间.

任取 $x \in H \cap K$, 则 $x \in H$. 因 H 是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化的, 故可设 $x = x_{\bar{0}} + x_{\bar{1}}$, 其中 $x_\theta \in H_\theta$, $\forall \theta \in \mathbb{Z}_2$. 由 $x \in K$, 同理可设 $x = x'_{\bar{0}} + x'_{\bar{1}}$, 其中 $x'_\theta \in K_\theta$. 因为 x 在 $L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 中的分解式是惟一的, 所以 $x_\theta = x'_\theta$, $\forall \theta \in \mathbb{Z}_2$. 因此

$$\begin{aligned} x_\theta = x'_\theta \in H_\theta \cap K_\theta &= (H \cap L_\theta) \cap (K \cap L_\theta) = (H \cap K) \cap L_\theta \\ &= (H \cap K)_\theta, \quad \forall \theta \in \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

由 1) 知 $H \cap K$ 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间.

任取 $x \in [H, K]$, 则 $x = \sum_i [x_i, y_i]$, 这里 $x_i \in H$, $y_i \in K$. 因为 H 是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化的, 故可设 $x_i = x_{i\bar{0}} + x_{i\bar{1}}$, 其中 $x_{i\theta} \in H_\theta$, $\forall \theta \in \mathbb{Z}_2$. 同理可设 $y_i = y_{i\bar{0}} + y_{i\bar{1}}$, 其中 $y_{i\theta} \in K_\theta$, $\forall \theta \in \mathbb{Z}_2$. 于是

$$\begin{aligned} x &= \sum_i [x_{i\bar{0}} + x_{i\bar{1}}, \ y_{i\bar{0}} + y_{i\bar{1}}] \\ &= \sum_i ([x_{i\bar{0}}, \ y_{i\bar{0}}] + [x_{i\bar{1}}, \ y_{i\bar{1}}]) + \sum_i ([x_{i\bar{0}}, \ y_{i\bar{1}}] + [x_{i\bar{1}}, \ y_{i\bar{0}}]). \end{aligned}$$

显然

$$\sum_i ([x_{i\bar{0}}, \ y_{i\bar{0}}] + [x_{i\bar{1}}, \ y_{i\bar{1}}]) \in [H, K] \cap L_{\bar{0}} = [H, K]_{\bar{0}},$$

$$\sum_i ([x_{i\bar{0}}, \ y_{i\bar{1}}] + [x_{i\bar{1}}, \ y_{i\bar{0}}]) \in [H, K]_{\bar{1}}.$$

由 1) 知, $[H, K]$ 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间. □

若 H 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间, 并且 H 关于 L 的方括号运算是封闭的, 则称 H 是 L 的子代数. 设 I 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间, 如果对任意 $x \in I$, $y \in L$, 均有 $[x, y] \in I$, 则称 I 是 L 的理想.

我们的定义要求子代数与理想必为 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间, 以下的引理指出了这一要求的理由.

引理 1.5 设 I 是李超代数 L 的理想, 则 $L/I := \{x + I \mid x \in L\}$ 关于 L 的诱导的加法与数乘是一个 $\mathbb{Z}_2$- 阶化线性空间, 进而 L 的 $[\,,\,]$ 运算诱导了 L/I 的一个 $[\,,\,]$ 运算, 使得 L/I 是一个李超代数.

证明　我们记 $\overline{L}=L/I$. L 的加法与数乘自然地诱导了 $\overline{L}$ 的加法与数乘运算, 使得 $\overline{L}$ 是一个线性空间. 设 $\overline{L}_\theta=\{x+I \mid x\in L_\theta\}$, $\forall\theta\in\mathbb{Z}_2$. 显然 $\overline{L}=\overline{L}_{\bar{0}}+\overline{L}_{\bar{1}}$. 令

$$0\neq x+I\in\overline{L}_{\bar{0}},\quad 0\neq y+I\in\overline{L}_{\bar{1}},$$

则有

$$x\in L_{\bar{0}}\backslash I,\quad y\in L_{\bar{1}}\backslash I. \tag{1.5}$$

若 $x+I=y+I$, 则 $x+(-y)\in I$. 因为 I 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间, 所以 $x\in I\cap L_{\bar{0}}$, $-y\in I\cap L_{\bar{1}}$. 此与 (1.5) 式矛盾, 于是 $x+I\neq y+I$, 因此 $\overline{L}_{\bar{0}}\cap\overline{L}_{\bar{1}}=0$, 从而 $\overline{L}=\overline{L}_{\bar{0}}\oplus\overline{L}_{\bar{1}}$. 这就证明了 $\overline{L}$ 是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化线性空间.

易见 L 的 [,] 运算自然地诱导了 $\overline{L}$ 的 [,] 运算, 使得 $\overline{L}$ 是一个李超代数. □

我们称李超代数 L/I 为 L 对理想 I 的商代数.

设 I 与 J 是李超代数 L 的理想, 则 I 与 J 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间. 由引理 1.4 知 $[I,J]=[I,J]_{\bar{0}}\oplus[I,J]_{\bar{1}}$ 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间. 利用阶化 Jacobi 等式可以证明 $[I,J]$ 还是 L 的理想. 特别地, $[L,L]$ 是 L 的理想, 当然它是 L 的子代数. 借用李代数与群论的语言, 称 $[L,L]$ 为 L 的换位子代数.

定义 1.6　*若李超代数 L 只有平凡理想, 并且 $[L,L]\neq 0$, 则称 L 是单李超代数.*

定义 1.6 中的条件 $[L,L]\neq 0$ 使得零李超代数与一维交换李超代数不是单李超代数.

设 $A=A_{\bar{0}}\oplus A_{\bar{1}}$ 与 $A'=A'_{\bar{0}}\oplus A'_{\bar{1}}$ 是超代数, $\phi: A\rightarrow A'$ 是线性映射. 若 $\phi(A_\theta)\subseteq A'_\theta$, $\forall\theta\in\mathbb{Z}_2$, 则称 ϕ 是偶的线性映射. 若偶的线性映射 ϕ 还满足: $\phi(xy)=\phi(x)\phi(y)$, $\forall x,y\in A$, 则称 ϕ 是 A 到 A' 的同态映射. 如果 ϕ 是 A 到 A' 的满的同态映射, 我们称 A' 是 A 的同态象, 或称 A 与 A' 同态, 记为 $A\sim A'$. 若同态映射 ϕ 是双射, 则称 ϕ 是同构映射, 此时称 A 与 A' 同构, 记为 $A\cong A'$. 易见, 同构关系是一个等价关系. 此外, A 到 A 自身的同构映射称为 A 的自同构. 当然, 以上同态与同构的概念适合于李超代数, 但是需要将代数的乘法写成方括号的形式. 李代数的同态与同构定理对李超代数仍然成立.

1) 若 $\phi: L\rightarrow L'$ 是李超代数的同态映射, 则 $\ker\phi:=\{x\in L \mid \phi(x)=0\}$ 是 L 的理想, 并且 $L/\ker\phi\cong \mathrm{Im}\phi$.

2) 若 I 与 J 是李超代数 L 的理想, 使得 $I\subseteq J$, 则 J/I 是 L/I 的理想, 并且 $(L/I)/(J/I)$ 自然同构于 L/J.

3) 若 I 与 J 是李超代数 L 的理想, 则 $(I+J)/J$ 同构于 $I/(I\cap J)$.

例 1.7　*设 $A=A_{\bar{0}}\oplus A_{\bar{1}}$ 是结合超代数. 在 A 上定义双线性的方括号乘法, 使得*

$$[x,y]=xy-(-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}yx,\qquad \forall x,y\in \mathrm{hg}(A).$$

直接验证可知, 关于此方括号乘法, A 是一个李超代数, 称它为与结合代数 A 关联的李超代数, 记为 A^-.

例 1.8 设 $V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化空间, $\mathrm{End}(V)$ 是 V 的所有线性变换构成的线性空间. 任取 $\theta\in\mathbb{Z}_2$, 令

$$\mathrm{End}_\theta(V)=\{x\in\mathrm{End}(V)\mid x(V_\mu)\subseteq V_{\mu+\theta},\forall\mu\in\mathbb{Z}_2\}.$$

易见, $\mathrm{End}(V)=\mathrm{End}_{\bar{0}}(V)\oplus\mathrm{End}_{\bar{1}}(V)$. 于是, 关于线性变换的乘法, $\mathrm{End}(V)$ 是一个结合超代数. 由例 1.7 知, $\mathrm{End}(V)^-$ 是李超代数. 我们简记 $\mathrm{End}(V)^-$ 为 $\mathrm{pl}(V)$. 于是 $\mathrm{pl}(V)=\mathrm{pl}_{\bar{0}}(V)\oplus\mathrm{pl}_{\bar{1}}(V)$, 其中 $\mathrm{pl}_\theta(V)=\mathrm{End}_\theta(V)$, $\forall\theta\in\mathbb{Z}_2$. 因为 $\mathrm{pl}(V)$ 在李超代数中的作用与 $\mathrm{gl}(V)$ 在李代数中的作用相仿, 所以称 $\mathrm{pl}(V)$ 为 V 的一般线性李超代数.

定义 1.9 设 $L=L_{\bar{0}}\oplus L_{\bar{1}}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的李超代数, $V=V_{\bar{0}}+V_{\bar{1}}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化线性空间. 则称李超代数的同态映射 $\rho:L\to\mathrm{pl}(V)$ 为 L 在 V 上的一个表示.

定义 1.10 设 $L=L_{\bar{0}}\oplus L_{\bar{1}}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的李超代数, $V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化线性空间. 若 V 被赋予一个运算 $L\times V\to V$, 使得 $(x,v)\mapsto xv$, $\forall x\in L$, $v\in V$, 且满足:

1) $(\lambda x+\eta y)v=\lambda(xv)+\eta(yv)$, $\quad\forall\lambda,\eta\in\mathbb{F}$, $x,y\in L$, $v\in V$,

2) $x(\lambda v+\eta w)=\lambda(xv)+\eta(xw)$, $\quad\forall\lambda,\eta\in\mathbb{F}$, $x\in L$, $v,w\in V$,

3) 若 $x\in L_\theta$, $v\in V_\mu$, 其中 $\theta,\mu\in\mathbb{Z}_2$, 则 $xv\in V_{\theta+\mu}$,

4) $[x,y]v=x(yv)-(-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}y(xv)$, $\forall x,y\in\mathrm{hg}(L)$, $v\in V$,

则称 V 是一个 L- 模.

设 ρ 是 L 在 V 上的一个表示. 令 $xv:=\rho(x)(v)$, $\forall x\in L$, $\forall v\in V$. 直接验证可知, 如上定义的乘法使得 V 是一个 L- 模, 称之为表示 ρ 提供的 L- 模. 反之, 给出一个 L- 模 V, 可定义映射 $\rho:L\to\mathrm{pl}(V)$, 使得 $\rho(x)(v):=xv$, $\forall x\in L$, $v\in V$, 则 ρ 是 L 在 V 上的一个表示. 因此, 李超代数的表示的研究可以转化为李超代数的模的研究, 反之亦然.

例 1.11 设 L 是李超代数, $x\in L$, 令 $\mathrm{ad}\,x(z)=[x,z]$, $\forall z\in L$. 易见 $\mathrm{ad}\,x\in\mathrm{pl}(L)$. 设 $\mathrm{ad}:L\to\mathrm{pl}(L)$ 是映射, 使得 $x\mapsto\mathrm{ad}\,x$, $\forall x\in L$. 显然 ad 是偶的线性映射. 利用 $\mathrm{d}(\mathrm{ad}\,x)=\mathrm{d}(x)$, $\mathrm{d}(\mathrm{ad}\,y)=\mathrm{d}(y)$ 以及 (1.3) 式可得

$$[\mathrm{ad}\,x,\mathrm{ad}\,y](z)=\mathrm{ad}[x,y](z),\quad\forall x,y\in\mathrm{hg}(L),\quad\forall z\in L,$$

于是 $\mathrm{ad}[x,y]=[\mathrm{ad}\,x,\mathrm{ad}\,y]$, $\forall x,y\in L$. 所以 ad 是 L 在 L 上表示, 称 ad 为 L 的伴随表示.

定义 1.12 设 $A=A_{\bar{0}}\oplus A_{\bar{1}}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的超代数, $D\in\mathrm{pl}_\theta(A)$, 其中 $\theta\in\mathbb{Z}_2$. 如果

$$D(xy)=D(x)y\oplus(-1)^{\theta\mathrm{d}(x)}xD(y),\quad\forall x\in\mathrm{hg}(A),\quad\forall y\in A,$$

则称 D 是 A 的次数为 θ 的齐次导子.

令 $\mathrm{Der}_\theta(A)$ 为 A 的所有次数为 θ 的齐次导子的集合, 这里 $\theta\in\mathbb{Z}_2$. 定义

$$\mathrm{Der}(A):=\mathrm{Der}_{\bar{0}}(A)\oplus\mathrm{Der}_{\bar{1}}(A).$$

可以证明, $\mathrm{Der}(A)$ 是 $\mathrm{pl}(A)$ 的子代数. 称李超代数 $\mathrm{Der}(A)$ 为 A 的导子超代数, 并称 $\mathrm{Der}(A)$ 的元素为 A 的导子.

例 1.13 设 L 是李超代数, $x \in L_\theta$, 其中 $\theta \in \mathbb{Z}_2$. 利用 (1.3) 式可知, $\mathrm{ad}\, x \in \mathrm{Der}_\theta(L)$, 我们称 $\mathrm{ad}\, x$ 为 L 的内导子.

定义 1.14 设 $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$ 是超代数. 若 $A = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$, 其中 A_i 是 A 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间, 并且 $A_iA_j \subseteq A_{i+j}$, $\forall i, j \in \mathbb{Z}$, 则称 A 是 $\mathbb{Z}$- 阶化超代数. 若 $A_{\bar{0}} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} A_{2i}$, $A_{\bar{1}} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} A_{2i+1}$, 则称 A 的 $\mathbb{Z}$- 阶化与 $\mathbb{Z}_2$- 阶化是相容的.

定义 1.15 设 $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化超代数, 若 $x \in A_i$, 则称 x 是 $\mathbb{Z}$- 齐次元素, 并且称 x 的 $\mathbb{Z}$- 次数为 i, 记为 $\mathrm{zd}(x) = i$. 为方便, 我们约定零元素的 $\mathbb{Z}$- 次数可以是任何整数. 此外, 当我们称 $A = \bigoplus_{i\geq -r} A_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化超代数时(这里 r 是非负整数), 我们约定：当 $i < -r$ 时, $A_i = 0$. 同样, 若 $A = \bigoplus_{i=-r}^{t} A_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化超代数(这里 r 与 s 是非负整数), 则约定：当 $i < -r$ 或者 $i > t$ 时, $A_i = 0$.

显然, 若 $\mathrm{zd}(x) = i$, $\mathrm{zd}(y) = j$, 其中 $x, y \in A$, 则 $\mathrm{zd}(xy) = i + j$.

若李超代数 $L = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} L_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化的, 则 L_0 是 L 的子代数. 由 $[L_0, L_i] \subseteq L_i$ 知, L_i 是 L_0- 模, 其中 $i \in \mathbb{Z}$.

设 $L = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} L_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数.

1) 若对任意 $i \in \mathbb{N}_0$, 均有 $\{x \in L_i \mid [x, L_{-1}] = 0\} = 0$, 则称 L 在此 $\mathbb{Z}$- 阶化之下是可迁的, 或简称 L 是可迁的.

2) 若 L_0- 模 L_{-1} 是不可约的, 则称 L 在此 $\mathbb{Z}$- 阶化之下是不可约的, 或简称 L 是不可约的.

命题 1.16 设 $L = \oplus_{i\geq -1} L_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数, 并且 $L_{-1} \neq 0$. 若 L 是单李超代数, 则

1) L 是可迁的,

2) L 是不可约的,

3) $[L_{-1}, L_1] = L_0$.

证明 设 I 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间, 使得

$$[L_0, I] \subseteq I, \quad [L_{-1}, I] \subseteq I. \tag{1.6}$$

令 $L^+ = \oplus_{i\geq 1} L_i$. 显然

$$[L_0, L^+] \subseteq L^+. \tag{1.7}$$

对任意 $n \in \mathbb{N}_0$, 置

$$I^n = [L^+, [L^+, \cdots, [L^+, I] \cdots]] \qquad (\text{共 } n \text{ 个 } L^+).$$

设 $\widetilde{I} = \sum_{n\geq 0} I^n$. 由引理 1.4 的 2) 可推得, $\widetilde{I}$ 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间, 显然

$$[L^+, \widetilde{I}] \subseteq \widetilde{I}. \tag{1.8}$$

我们对 n 用归纳法证明

$$[L_0, I^n] \subseteq \widetilde{I}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.9}$$

当 $n = 0$ 时, 由 (1.6) 式知, $[L_0, I^0] = [L_0, I] \subseteq I \subseteq \widetilde{I}$. 假设 $[L_0, I^{n-1}] \subseteq \widetilde{I}$, 利用 (1.4), (1.7)~(1.9) 式知

$$\begin{aligned} [L_0, I^n] &= [L_0, [L^+, I^{n-1}]] \\ &\subseteq [[L_0, L^+], I^{n-1}] + [L^+, [L_0, I^{n-1}]] \\ &\subseteq [L^+, I^{n-1}] + [L^+, \widetilde{I}] \\ &\subseteq I^n + \widetilde{I} \\ &= \widetilde{I}, \end{aligned}$$

归纳法完成. 相仿地, 利用 (1.4), (1.6)~(1.9) 式, 对 n 用归纳法可证得 $[L_{-1}, I^n] \subseteq \widetilde{I}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. 所以

$$[L_0, \widetilde{I}] \subseteq \widetilde{I}, \quad [L_{-1}, \widetilde{I}] \subseteq \widetilde{I}. \tag{1.10}$$

由 (1.8) 与 (1.10) 式知, $\widetilde{I}$ 是 L 的理想.

1) 令 $I = \{x \in \oplus_{i\geq 0} L_i \mid [x, L_{-1}] = 0\}$.

显然 I 是 L 的子空间, 设 $L_{(0)} = \oplus_{i\geq 0} L_i$. 由引理 1.4 知, $L_{(0)}$ 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间. 任取 $x \in I$, 则 $x \in L_{(0)}$. 故 $x = x_{\bar{0}} + x_{\bar{1}}$, 其中 $x_\theta \in (L_{(0)})_\theta \subseteq L_\theta$, $\forall \theta \in \mathbb{Z}_2$. 由 $x \in I$ 知 $[x, L_{-1}] = 0$. 故

$$[x_{\bar{0}} + x_{\bar{1}}, (L_{-1})_\theta] = 0, \ \forall \theta \in \mathbb{Z}_2.$$

于是 $[x_{\bar{0}}, (L_{-1})_\theta] = 0$, $\forall \theta \in \mathbb{Z}_2$. 因 L_{-1} 是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化的, 所以 $[x_{\bar{0}}, L_{-1}] = 0$. 因此 $x_{\bar{0}} \in I$, 故 $x_{\bar{0}} \in I \cap L_{\bar{0}} = I_{\bar{0}}$. 同理 $x_{\bar{1}} \in I_{\bar{1}}$. 由引理 1.4, I 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间.

由 (1.4) 式知, $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间 I 适合 (1.6) 式. 由 (a) 知 $\widetilde{I}$ 是 L 的理想. 因为 $I \subseteq L_{(0)}$, 所以 $\widetilde{I} \subseteq L_{(0)}$. 因此 $\widetilde{I}$ 是 L 的真理想. 由于 L 是单李超代数, 因而 $\widetilde{I} = 0$. 于是对任意 $i \in \mathbb{N}_0$, 有

$$\{x \in L_i \mid [x, L_{-1}] = 0\} \subseteq \widetilde{I} = 0.$$

这就证明了 L 是可迁的.

2) 设 I 是 L_0- 模 L_{-1} 的非零子模. 则 I 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间, 并且满足 (1.6) 式. 由 (a) 知 $\widetilde{I}$ 是 L 的理想. 因为 $I \neq 0$, 故 $\widetilde{I} \neq 0$. 由于 L 是单的, 所以 $\widetilde{I} = L$. 由 $\widetilde{I}$ 的定义知 $\widetilde{I} \subseteq I \oplus L_{(0)}$, 从而 $L \subseteq I \oplus L_{(0)}$. 这就迫使 $I = L_{-1}$. 因此 L 是不可约的.

3) 设 $J = L_{-1} \oplus [L_{-1}, L_1] \oplus L^+$. 由引理 1.4 知, J 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间. 易见 $[L_{-1}, J] \subseteq J$, $[L^+, J] \subseteq J$. 利用 (1.4) 式知, $[L_0, J] \subseteq J$. 所以 $[L, J] \subseteq J$, 于是 J 是 L 的理想. 因为 L 是单的, 故 $J = L$. 这就迫使 $[L_{-1}, L_1] = L_0$. □

定义 1.17 设 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的李超代数, U 是 $\mathbb{F}$ 上的结合超代数. 设 $i: L \to U^-$ 是李超代数的同态. 若对 $\mathbb{F}$ 上任意结合超代数 A 与任意李超代数的

同态 $f: L \to A^-$, 都存在惟一的结合超代数的同态 $\bar{f}: U \to A$, 使得 $f = \bar{f}i$, 那么我们称 (U, i) 为李超代数 L 的泛包络代数, 通常简称 U 为 L 的泛包络代数.

我们可构造 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 的泛包络代数如下: 设 $T(L) = \bigoplus_{r \geq 0} T^r(L)$ 是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化空间 L 的张量代数, 其中 $T^r(L) = L \otimes L \otimes \cdots \otimes L$ (r个 L). L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化诱导了 $T(L)$ 的一个 $\mathbb{Z}_2$- 阶化, 使得 $T(L)$ 是一个结合超代数. 令 R 是由所有形如

$$[x, y] - x \otimes y + (-1)^{\mathrm{d}(x)\,\mathrm{d}(y)} y \otimes x, \quad x, y \in \mathrm{hg}(L),$$

的元素生成的 $T(L)$ 的理想. 置 $U = T(L)/R$. 显然, 自然映射 $L \to U$ 诱导了李超代数的同态 $i: L \to U^-$, 则 (U, i) 是 L 的泛包络代数. 所以李超代数 L 的泛包络代数是存在的. 由定义 1.17 知, 在同构的意义下, L 的泛包络代数是惟一的.

文献 [46] 证明了李超代数 L 的泛包络代数 U 的基元素定理, 也称为 PBW 定理, 下面叙述这个定理.

PBW 定理　设 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的李超代数, $x_1, \cdots, x_m$ 是 $L_{\bar{0}}$ 的 $\mathbb{F}$- 基底, $y_1, \cdots, y_n$ 是 $L_{\bar{1}}$ 的 $\mathbb{F}$- 基底. 设 U 是 L 的泛包络代数, 则所有形如

$$x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m} y_{i_1} \cdots y_{i_t}$$

的元素构成了 U 的 $\mathbb{F}$- 基底, 其中 $k_i \geq 0$, $i = 1, \cdots, m$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_t \leq n$.

§2　Cartan 型模李超代数的构作 [106]

为定义 Cartan 型模李超代数, 我们需要外代数的导子超代数的自由基. 为此, 我们确定外代数的导子超代数. 首先叙述 $\mathbb{F}$ 上自由代数的定义. 考察用字母 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 作成的一切形式元

$$\xi_{i_1}\xi_{i_2}\cdots\xi_{i_m}, \qquad \forall m \in \mathbb{N}, \qquad 1 \leq i_1, i_2, \cdots, i_m \leq n. \tag{2.1}$$

设 $\widetilde{\Lambda}(n)$ 是以这些形式元为基底张成的 $\mathbb{F}$ 上的线性空间. 在 $\widetilde{\Lambda}(n)$ 的基底 (2.1) 上规定如下的乘法表

$$(\xi_{i_1}\xi_{i_2}\cdots\xi_{i_m})(\xi_{j_1}\xi_{j_2}\cdots\xi_{j_k}) = \xi_{i_1}\xi_{i_2}\cdots\xi_{i_m}\xi_{j_1}\xi_{j_2}\cdots\xi_{j_k}.$$

这样, 利用基底 (2.1) 乘法表可以定义 $\widetilde{\Lambda}(n)$ 的一个关于加法分配的乘法, 使得 $\widetilde{\Lambda}(n)$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的结合代数. 我们称 $\widetilde{\Lambda}(n)$ 为非交换未定元 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 生成的自由代数.

显然, $\mathrm{d}(\xi_i) = \bar{1}$　$(i = 1, 2, \cdots, n)$ 定义了 $\widetilde{\Lambda}(n)$ 的一个 $\mathbb{Z}_2$- 阶化, 使得 $\widetilde{\Lambda}(n)$ 是一个结合超代数. 设

$$S = \{\xi_i\xi_j + \xi_j\xi_i \mid i, j = 1, 2, \cdots, n\}.$$

显然 $S \subseteq \widetilde{\Lambda}(n)_{\bar{0}} \subseteq \mathrm{hg}(\widetilde{\Lambda}(n))$. 设 I 是由 S 生成的 $\widetilde{\Lambda}(n)$ 的理想.

引理 2.1　*设 $Q \in \mathrm{hg}(\widetilde{\Lambda}(n))$, 则 $Q\xi_j - (-1)^{\mathrm{d}(Q)}\xi_j Q \in I$, 其中 $j = 1, 2, \cdots, n$.*

证明 1) 先证 Q 是 $\widetilde{\Lambda}(n)$ 的单项式的情形. 设 $Q=\xi_{i_1}\xi_{i_2}\cdots\xi_{i_k}$. 对 k 用归纳法证明引理结论成立. 当 $k=1$ 时结论显然成立. 假设对 $k-1$ 结论成立. 设 $Q_1=\xi_{i_1}\xi_{i_2}\cdots\xi_{i_{k-1}}$, 则 $Q=Q_1\xi_{i_k}$. 由归纳假设,

$$\begin{aligned}&Q\xi_j-(-1)^{\mathrm{d}(Q)}\xi_jQ\\&=Q_1\xi_{i_k}\xi_j-(-1)^{\mathrm{d}(Q)}\xi_jQ_1\xi_{i_k}\\&=-Q_1\xi_j\xi_{i_k}+Q_1(\xi_j\xi_{i_k}+\xi_{i_k}\xi_j)+(-1)^{\mathrm{d}(Q_1)}\xi_jQ_1\xi_{i_k}\\&=-(Q_1\xi_j-(-1)^{\mathrm{d}(Q_1)}\xi_jQ_1)\xi_{i_k}+Q_1(\xi_j\xi_{i_k}+\xi_{i_k}\xi_j)\in I,\end{aligned}$$

所以结论对 k 也成立.

2) 设 $Q=\sum_{i=1}^t y_i$, 其中 y_i 是 $\widetilde{\Lambda}(n)$ 的单项式, 并且 $\mathrm{d}(y_1)=\mathrm{d}(y_2)=\cdots=\mathrm{d}(y_k)$. 由 1) 知

$$\begin{aligned}Q\xi_j-(-1)^{\mathrm{d}(Q)}\xi_jQ&=\left(\sum_{i=1}^t y_i\right)\xi_j-(-1)^{\mathrm{d}(Q)}\xi_j\left(\sum_{i=1}^t y_i\right)\\&=\sum_{i=1}^t(y_i\xi_j-(-1)^{\mathrm{d}(y_i)}\xi_jy_i)\in I.\qquad\square\end{aligned}$$

设 $\Lambda(n)=\widetilde{\Lambda}(n)/I$. 令 $x_i=\xi_i+I\in\widetilde{\Lambda}(n)/I,\ \ i=1,\cdots,n$. 易见 $\Lambda(n)$ 就是由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 生成的外代数.

引理 2.2 *以下命题成立.*

1) *任取* $z_1,z_2,\cdots,z_n\in\widetilde{\Lambda}(n)_\theta$, *其中* $\theta\in\mathbb{Z}_2$, *则存在* $\widetilde{D}\in\mathrm{Der}_{\theta+\bar{1}}(\widetilde{\Lambda}(n))$, *使得* $\widetilde{D}(\xi_i)=z_i,\ \ i=1,\cdots,n$.

2) *任取* $y_1,y_2,\cdots,y_n\in\Lambda(n)_\theta$, *其中* $\theta\in\mathbb{Z}_2$, *则存在* $D\in\mathrm{Der}_{\theta+\bar{1}}(\Lambda(n))$, *使得* $D(x_i)=y_i,\ \ i=1,\cdots,n$.

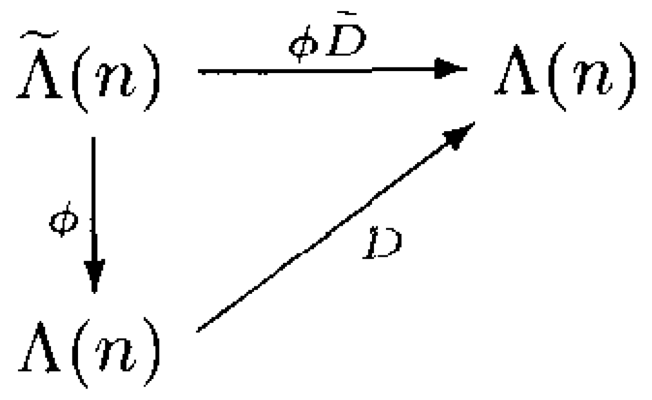
3) *任取* $y_1,y_2,\cdots,y_n\in\Lambda(n)$, *则存在* $D\in\mathrm{Der}(\Lambda(n))$, *使得* $D(x_i)=y_i,\ \ i=1,\cdots,n$.

证明 1) 设 $\widetilde{\Lambda}(n)_1=\mathbb{F}\xi_1+\mathbb{F}\xi_2+\cdots+\mathbb{F}\xi_n\subseteq\widetilde{\Lambda}(n)$. 显然, 存在线性映射 $\widetilde{D}:\widetilde{\Lambda}(n)_1\to\widetilde{\Lambda}(n)_\theta$, 使得 $\widetilde{D}(\xi_i)=z_i,\ \ i=1,\cdots,n$. 因为 $\widetilde{\Lambda}(n)$ 是由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 生成的自由代数, 所以 $\widetilde{D}$ 可以自然地扩张为 $\mathrm{Der}(\widetilde{\Lambda}(n))$ 的元素. 由于 $\widetilde{\Lambda}(n)_1\subseteq\widetilde{\Lambda}(n)_{\bar{1}}$, 故 $\widetilde{D}\in\mathrm{Der}_{\theta+\bar{1}}(\widetilde{\Lambda}(n))$.

2) 令 $\phi:\widetilde{\Lambda}(n)\to\widetilde{\Lambda}(n)/I$ 是超代数的自然同态. 则存在 $h_1,h_2,\cdots,h_n\in\widetilde{\Lambda}(n)$, 使得 $\phi(h_i)=y_i,\ \ i=1,\cdots,n$. 因为 ϕ 是偶的线性映射, 所以 $h_i\in\widetilde{\Lambda}(n)_\theta, i=1,\cdots,n$. 由 1) 知, 存在 $\widetilde{D}\in\mathrm{Der}_{\theta+\bar{1}}(\widetilde{\Lambda}(n))$, 使得 $\widetilde{D}(\xi_i)=h_i, i=1,\cdots,n$. 由引理 2.1,

$$\begin{aligned}&\widetilde{D}(\xi_i\xi_j+\xi_j\xi_i)\\&=\widetilde{D}(\xi_i)\xi_j+(-1)^{\theta+\bar{1}}\xi_i\widetilde{D}(\xi_j)+\widetilde{D}(\xi_j)\xi_i+(-1)^{\theta+\bar{1}}\xi_j\widetilde{D}(\xi_i)\\&=(\widetilde{D}(\xi_i)\xi_j-(-1)^{\theta}\xi_j\widetilde{D}(\xi_i))+(\widetilde{D}(\xi_j)\xi_i-(-1)^{\theta}\xi_i\widetilde{D}(\xi_j))\in I.\end{aligned}$$

于是 $\widetilde{D}(I)\subseteq I$. 故 $\phi\widetilde{D}(I)=0$, 即 $I\subseteq\ker\phi\widetilde{D}$. 所以存在线性映射 $D:\Lambda(n)\to\Lambda(n)$, 使得下图



是交换的, 即 $\phi\widetilde{D}=D\phi$. 因此

$$D(x_i)=D(\xi_i+I)=D\phi(\xi_i)=\phi\widetilde{D}(\xi_i)=\phi(h_i)=y_i,\quad i=1,\cdots,n.$$

由于 $x_i\in\Lambda(n)_{\bar{1}}$, $y_i\in\Lambda(n)_\theta$, $i=1,\cdots,n$, 所以 $D\in \mathrm{pl}_{\theta+\bar{1}}(\Lambda(n))$.

任取 $x,y\in \mathrm{hg}(\Lambda(n))$, 则存在 $x',y'\in \mathrm{hg}(\widetilde{\Lambda}(n))$, 使得 $\phi(x')=x$, $\phi(y')=y$. 于是

$$\begin{aligned} D(xy) &= D(\phi(x')\phi(y'))=D\phi(x'y')=\phi\widetilde{D}(x'y')\\ &= \phi(\widetilde{D}(x')y'+(-1)^{(\theta+\bar{1})\mathrm{d}(x')}x'\widetilde{D}(y'))\\ &= \phi\widetilde{D}(x')\phi(y')+(-1)^{(\theta+\bar{1})\mathrm{d}(x)}\phi(x')\phi\widetilde{D}(y')\\ &= D\phi(x')\phi(y')+(-1)^{(\theta+\bar{1})\mathrm{d}(x)}\phi(x')D\phi(y')\\ &= D(x)y+(-1)^{(\theta+\bar{1})}xD(y). \end{aligned}$$

所以 $D\in \mathrm{Der}_{\theta+\bar{1}}(\Lambda(n))$.

3) 设 $y_i=y_{i0}+y_{i1}$, 其中 $y_{i0}\in\Lambda(n)_{\bar{0}}$, $y_{i1}\in\Lambda(n)_{\bar{1}}$, $i=1,\cdots,n$. 由 2) 知存在 $D'\in \mathrm{Der}_{\bar{0}}(\Lambda(n))$, $D''\in \mathrm{Der}_{\bar{1}}(\Lambda(n))$, 使得

$$D'(x_i)=y_{i1},\quad D''(x_i)=y_{i0},\qquad i=1,\cdots,n.$$

令 $D=D'+D''$, 则 $D\in \mathrm{Der}(\Lambda(n))$. 易见 $D(x_i)=y_i$, $i=1,\cdots,n$. □

由引理 2.2 的 2) 知, 存在 $\partial_i\in \mathrm{Der}_{\bar{1}}(\Lambda(n))$, $i=1,\cdots,n$. 使得 $\partial_i(x_j)=\delta_{ij}$, $j=1,\cdots,n$. 令 $D\in \mathrm{Der}(\Lambda(n))$. 设 $D(x_j)=y_j$, $j=1,\cdots,n$. 显然 $\sum_{i=1}^n y_i\partial_i\in \mathrm{Der}(\Lambda(n))$. 另一方面, 由于 $\{x_j\mid j=1,\cdots,n\}$ 生成了 $\Lambda(n)$, 以及

$$\left(\sum_{i=1}^n y_i\partial_i\right)(x_j)=\sum_{i=1}^n y_i\partial_i(x_j)=y_j,\qquad j=1,\cdots,n,$$

所以 $D=\sum_{i=1}^n y_i\partial_i$. 于是我们证明了以下命题.

命题 2.3 $\mathrm{Der}(\Lambda(n))=\left\{\sum_{i=1}^n y_i\partial_i\mid y_i\in\Lambda(n),\quad i=1,\cdots,n.\right\}$.

我们在上节给出了李超代数上的模的定义. 类似地, 可定义结合超代数 A 上的模 V, 这只需将定义 1.10 中的 4) 改为 $(xy)v=x(y(v))$, $\forall x,y\in \mathrm{hg}(A)$, $\forall v\in V$. 于是 $\mathrm{Der}(\Lambda(n))$ 是一个 $\Lambda(n)$- 模. 设 $\sum_{i=1}^n y_i\partial_i\in \mathrm{Der}(\Lambda(n))$. 若 $\sum_{i=1}^n y_i\partial_i=0$, 则可推得 $y_i=0$, $i=1,\cdots,n$. 再由命题 2.3 知, $\partial_1,\partial_2,\cdots,\partial_n$ 是 $\mathrm{Der}(\Lambda(n))$ 的一个自由 $\Lambda(n)$-基, 并且称 $\partial_1,\partial_2,\cdots,\partial_n$ 为 $\Lambda(n)$ 的特殊导子.

我们称素特征域上的李超代数为模李超代数. 下面构作四类 Cartan 型模李超代数. 设 $\mathbb{F}$ 是特征数 $p>2$ 的域 (因为 $p=2$ 时, $\mathbb{F}$ 上的李超代数就是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化李代数,

所以我们不考虑 $p=2$ 的情形). 以下总是用 p 表示基域 $\mathbb{F}$ 的特征数, 仍然用 $\mathbb{N}$ 与 $\mathbb{N}_0$ 分别表示正整数集与非负整数集. 设 $m,n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$. 若 $r,t\in\mathbb{N}_0$, 令 $\binom{r}{t}$ 表示二项式系数 $\frac{r!}{(r-t)!t!}$. 若 $r<t$, 约定 $\binom{r}{t}=0$. 设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\in\mathbb{N}_0^m$, 令 $|\alpha|=\sum_{i=1}^m\alpha_i$. 设 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)\in\mathbb{N}_0^m$, 定义 $\alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_m+\beta_m)$, $\binom{\alpha}{\beta}=\prod_{i=1}^m\binom{\alpha_i}{\beta_i}$, $\alpha\le\beta\Longleftrightarrow\alpha_i\le\beta_i,\ i=1,2,\cdots,m$. 设 $\mathcal{U}(m)$ 是具有生成元集 $\{x^{(\alpha)}\mid\alpha\in\mathbb{N}_0^m\}$ 的 $\mathbb{F}$ 上的除幂代数, 则 $\mathcal{U}(m)$ 中有以下运算公式:

$$x^{(\alpha)}x^{(\beta)}=\binom{\alpha+\beta}{\alpha}x^{(\alpha+\beta)},\qquad\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^m\tag{2.2}$$

置 $\varepsilon_i=(\delta_{i1},\delta_{i2},\cdots,\delta_{im})$, 其中 δ_{ij} 为 Kronecker 符号.

简记 $x^{(\varepsilon_i)}$ 为 x_i, 这里 $1\le i\le m$. 我们用 $\Lambda(n)$ 表示具有 n 个不定元 $x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_s$ 的外代数, 其中 $s=m+n$. 令 $\Lambda(m,n)=\mathcal{U}(m)\otimes\Lambda(n)$. 则 $\mathcal{U}(m)$ 的平凡的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化与 $\Lambda(n)$ 的自然的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化诱导了 $\Lambda(m,n)$ 的一个 $\mathbb{Z}_2$- 阶化:

$$\Lambda(m,n)_{\bar 0}=\mathcal{U}(m)\otimes\Lambda(n)_{\bar 0},\qquad\Lambda(m,n)_{\bar 1}=\mathcal{U}(m)\otimes\Lambda(n)_{\bar 1},$$

从而 $\Lambda(m,n)$ 是一个结合超代数.

设 $f\in\mathcal{U}(m),g\in\Lambda(n)$, 简记 $\Lambda(m,n)$ 中的元素 $f\otimes g$ 为 fg. 于是在 $\Lambda(m,n)$ 中, 除了 (2.2) 式外, 还有以下运算公式:

$$x_ix_j=-x_jx_i,\qquad i,j=m+1,\cdots,s.$$

$$x^{(\alpha)}x_j=x_jx^{(\alpha)},\quad\forall\alpha\in\mathbb{N}_0^m,\ j=m+1,\cdots,s.$$

对 $k=1,\cdots,n$, 定义

$$B_k=\{\langle i_1,i_2,\cdots,i_k\rangle\mid m+1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le s\}.$$

设 $B(n)=\cup_{i=0}^nB_k$, 其中 $B_0=\varnothing$. 若 $u=\langle i_1,i_2,\cdots,i_k\rangle\in B_k$, 则令 $|u|=k$, $\{u\}=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$ 与 $x^u=x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$. 约定 $|\varnothing|=0$, $x^{\varnothing}=1$. 则 $\{x^{(\alpha)}x^u\mid\alpha\in\mathbb{N}_0^m,\ u\in B(n)\}$ 构成了 $\Lambda(m,n)$ 的一个 $\mathbb{F}$- 基底.

为简便, 令 $Y_0=\{1,2,\cdots,m\}$, $Y_1=\{m+1,\cdots,s\}$, $Y=Y_0\cup Y_1$.

引理 2.4 设 $\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_2,\cdots,\mathrm{D}_s$ 是 $\Lambda(m,n)$ 的线性变换, 并且满足

$$\mathrm{D}_i(x^{(\alpha)}x^u)=\begin{cases}x^{(\alpha-\varepsilon_i)}x^u,&\forall\ i\in Y_0,\\x^{(\alpha)}\partial_i(x^u),&\forall\ i\in Y_1,\end{cases}\tag{2.3}$$

其中 ∂_i 是 $\Lambda(n)$ 的特殊导子, $\forall i\in Y_1$. 则 $\mathrm{D}_i\in\mathrm{Der}_{\bar 0}(\Lambda(m,n))$, $\forall i\in Y_0$; $\mathrm{D}_i\in\mathrm{Der}_{\bar 1}(\Lambda(m,n))$, $\forall i\in Y_1$.

证明　对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^m$, 任意 $u,v\in B(n)$, 利用等式

$$\binom{\alpha+\beta}{\alpha}=\binom{\alpha+\beta-\varepsilon_i}{\alpha-\varepsilon_i}+\binom{\alpha+\beta-\varepsilon_i}{\alpha},\quad \forall i\in Y_0,$$

可证得

$$\mathrm{D}_i((x^{(\alpha)}x^u)(x^{(\beta)}x^v))=(\mathrm{D}_i(x^{(\alpha)}x^u))(x^{(\beta)}x^v)+(x^{(\alpha)}x^u)(\mathrm{D}_i(x^{(\beta)}x^v)).$$

所以 $\mathrm{D}_i\in\mathrm{Der}_{\overline{0}}(\Lambda(m,n))$, $\forall i\in Y_0$.

类似地, 利用 $\partial_i(x^ux^v)=(\partial_i(x^u))x^v+(-1)^{\mathrm{d}(x^u)}x^u(\partial_i(x^v))$, $\forall i\in Y_1$, 以及 $\mathrm{d}(x^u)=\mathrm{d}(x^{(\alpha)}x^u)$ 可推得 $\mathrm{D}_i\in\mathrm{Der}_{\overline{1}}(\Lambda(m,n))$, $\forall i\in Y_1$.　□

同样, 我们称 $\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_2,\cdots,\mathrm{D}_s$ 为 $\Lambda(m,n)$ 的特殊导子. 由引理 2.4 知, $\mathrm{d}(\mathrm{D}_i)=\tau(i)$, 这里

$$\tau(i):=\begin{cases}\overline{0}, & \forall\ i\in Y_0,\\ \overline{1}, & \forall\ i\in Y_1.\end{cases}$$

若 $f\in\Lambda(m,n)_\theta$, $D\in\mathrm{Der}_\mu(\Lambda(m,n))$, 其中 $\theta,\mu\in\mathbb{Z}_2$, 令

$$(fD)(g):=fD(g),\quad \forall g\in\Lambda(m,n).$$

直接验证可知, $fD\in\mathrm{Der}_{\theta+\mu}(\Lambda(m,n))$.

引理 2.5　1) 设 $f,g\in\Lambda(m,n)$, $D,E\in\mathrm{Der}(\Lambda(m,n))$, 则

$$[fD,gE]=fD(g)E-(-1)^{\mathrm{d}(fD)\mathrm{d}(gE)}gE(f)D+(-1)^{\mathrm{d}(D)\mathrm{d}(g)}fg[D,E].$$

2) $[\mathrm{D}_i,\mathrm{D}_j]=0$, $\quad\forall i,j\in Y$.

证明　1) 任取 $h\in\Lambda(m,n)$, 则有

$$\begin{aligned}[fD,gE](h)&=(fD)((gE)(h))-(-1)^{\mathrm{d}(fD)\mathrm{d}(gE)}(gE)((fD)(h))\\&=(fD(g))(E(h))+(-1)^{\mathrm{d}(fD)\mathrm{d}(g)}g(fD)(E(h))\\&\quad-(-1)^{\mathrm{d}(fD)\mathrm{d}(gE)}gE(f)(D(h))\\&\quad-(-1)^{\mathrm{d}(fD)\mathrm{d}(gE)+\mathrm{d}(gE)\mathrm{d}(f)}f(gE)(D(h))\\&=(fD(g)E)(h)-(-1)^{\mathrm{d}(fD)\mathrm{d}(gE)}(gE(f)D)(h)\\&\quad+(-1)^{\mathrm{d}(D)\mathrm{d}(g)}(fgD)(E(h))\\&\quad-(-1)^{\mathrm{d}(D)\mathrm{d}(gE)}(fgE)(D(h))\\&=(fD(g)E)(h)-(-1)^{\mathrm{d}(fD)\mathrm{d}(gE)}(gE(f)D)(h)\\&\quad+(-1)^{\mathrm{d}(D)\mathrm{d}(g)}fg[D,E](h).\end{aligned}$$

于是可知引理的 1) 成立.

2) 任取 $\Lambda(m,n)$ 的一个基元素 $x^{(\alpha)}x^u$, 其中 $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$, $u \in B(n)$. 若 $i,j \in Y_0$, 或者 $i \in Y_0$, $j \in Y_1$, 由 (2.3) 式可推得

$$\begin{aligned}[\mathrm{D}_i, \mathrm{D}_j](x^{(\alpha)}x^u) =&(\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j - \mathrm{D}_j\mathrm{D}_i)(x^{(\alpha)}x^u)\\ =&\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j(x^{(\alpha)}x^u) - \mathrm{D}_j\mathrm{D}_i(x^{(\alpha)}x^u) = 0.\end{aligned}$$

设 $i,j \in Y_1$. 若 $i \notin \{u\}$ 或者 $j \notin \{u\}$, 显然

$$(\partial_i\partial_j + \partial_j\partial_i)(x^u) = 0.$$

若 $\{i,j\} \subseteq \{u\}$, 不妨设 $x^u = x^v x_i x^w x_j x^q$, 其中 $v,w,q \in B(n)$ ($\{v\},\{w\},\{q\}$ 中可以有空集 $\varnothing$). 则

$$\begin{aligned}(\partial_i\partial_j + \partial_j\partial_i)(x^u) &= \partial_i\partial_j(x^u) + \partial_j\partial_i(x^u)\\ &= (-1)^{|v|+1+|w|+|v|}x^v x^w x^q + (-1)^{|v|+|w|+|v|}x^v x^w x^q\\ &= 0.\end{aligned}$$

于是, 对 $i,j \in Y_1$,

$$\begin{aligned}[\mathrm{D}_i, \mathrm{D}_j](x^{(\alpha)}x^u) &= (\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j + \mathrm{D}_j\mathrm{D}_i)(x^{(\alpha)}x^u)\\ &= x^{(\alpha)}(\partial_i\partial_j + \partial_j\partial_i)(x^u)\\ &= 0.\end{aligned}$$

综上知 $[\mathrm{D}_i, \mathrm{D}_j] = 0$. □

令 $\mathrm{W}(m,n) = \{\sum_{i=1}^s f_i\mathrm{D}_i \mid f_i \in \Lambda(m,n),\ \forall i \in Y\}$.

命题 2.6 $\mathrm{W}(m,n)$ 是 $\mathrm{Der}(\Lambda(m,n))$ 的子代数.

证明 由引理 2.4 知 $\mathrm{D}_i \in \mathrm{Der}(\Lambda(m,n))$, 其中 $i \in Y$. 于是 $f_i\mathrm{D}_i \in \mathrm{Der}(\Lambda(m,n))$, 故 $\mathrm{W}(m,n) \subseteq \mathrm{Der}(\Lambda(m,n))$. 显然 $\mathrm{W}(m,n)$ 是 $\mathrm{Der}(\Lambda(m,n))$ 的子空间. 任取 $\sum_{i\in Y} f_i\mathrm{D}_i \in \mathrm{W}(m,n)$, 可设 $f_i = f_{i\bar{0}} + f_{i\bar{1}}$, 其中 $f_{i\theta} \in \Lambda(m,n)_\theta$, $\theta \in \mathbb{Z}_2$. 则有

$$\begin{aligned}\sum_{i\in Y} f_i\mathrm{D}_i &= \sum_{i\in Y}(f_{i\bar{0}} + f_{i\bar{1}})\mathrm{D}_i\\ &= \sum_{i\in Y} f_{i\bar{0}}\mathrm{D}_i + \sum_{i\in Y} f_{i\bar{1}}\mathrm{D}_i\\ &= y + z,\end{aligned}$$

其中

$$y = \sum_{i\in Y_0} f_{i\bar{0}}\mathrm{D}_i + \sum_{i\in Y_1} f_{i\bar{1}}\mathrm{D}_i \in \mathrm{W}(m,n) \cap \mathrm{Der}_{\bar{0}}(\Lambda(m,n)),$$

$$z = \sum_{i\in Y_1} f_{i\bar{0}}\mathrm{D}_i + \sum_{i\in Y_0} f_{i\bar{1}}\mathrm{D}_i \in \mathrm{W}(m,n) \cap \mathrm{Der}_{\bar{1}}(\Lambda(m,n)).$$

所以 $\mathrm{W}(m,n)$ 是 $\mathrm{Der}(\Lambda(m,n))$ 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间.

设 $\sum_{i=1}^{s} f_i\mathrm{D}_i \in \mathrm{W}(m,n)_\theta$, $\sum_{j=1}^{s} g_j\mathrm{D}_j \in \mathrm{W}(m,n)_\mu$, 其中 $\theta,\mu \in \mathbb{Z}_2$. 由引理 2.5 的 1) 与 2), 有

$$\begin{aligned}&\left[\sum_{i=1}^{s} f_i\mathrm{D}_i, \sum_{j=1}^{s} g_j\mathrm{D}_j\right]\\&= \sum_{i,j=1}^{s} f_i\mathrm{D}_i(g_j)\mathrm{D}_j - (-1)^{\theta\mu} \sum_{i,j=1}^{s} g_j\mathrm{D}_j(f_i)\mathrm{D}_i \in \mathrm{W}(m,n).\end{aligned} \tag{2.4}$$

因此 $\mathrm{W}(m,n)$ 关于 $[\ ,\ ]$ 运算是封闭的, 从而 $\mathrm{W}(m,n)$ 是 $\mathrm{Der}(\Lambda(m,n))$ 的子代数. □

易见, $\{x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_i \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^m,\ u \in B(n),\ i \in Y\}$ 构成了 $\mathrm{W}(m,n)$ 的一个 $\mathbb{F}$- 基底. 于是可知 $\mathrm{W}(m,n)$ 是无限维李超代数.

任取 $t_1,t_2 \in Y$, 定义线性映射 $\mathrm{D}_{t_1t_2}:\Lambda(m,n) \to \mathrm{W}(m,n)$, 使得对任意 $f \in \mathrm{hg}(\Lambda(m,n))$,

$$\mathrm{D}_{t_1t_2}(f) = \sum_{i=1}^{2} f_{t_i}\mathrm{D}_{t_i}, \tag{2.5}$$

其中

$$f_{t_1} = -(-1)^{\mathrm{d}(f)(\tau(t_1)+\tau(t_2))}\mathrm{D}_{t_2}(f), \tag{2.6}$$

$$f_{t_2} = (-1)^{\tau(t_1)\tau(t_2)}\mathrm{D}_{t_1}(f). \tag{2.7}$$

易见,

$$\mathrm{d}(f_{t_1}) = \mathrm{d}(f) + \tau(t_2),\ \ \mathrm{d}(f_{t_2}) = \mathrm{d}(f) + \tau(t_1),$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{D}_{t_1t_2}) = \tau(t_1) + \tau(t_2).$$

引理 2.7 $\sum_{i=1}^{2}(-1)^{\tau(t_i)\mathrm{d}(f_{t_i})}\mathrm{D}_{t_i}(f_{t_i}) = 0.$

证明 利用 (2.6) 与 (2.7) 式可得

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{2}(-1)^{\tau(t_i)\mathrm{d}(f_{t_i})}\mathrm{D}_{t_i}(f_{t_i})\\
&= (-1)^{\tau(t_1)\mathrm{d}(f_{t_1})}\mathrm{D}_{t_1}(-(-1)^{\mathrm{d}(f)(\tau(t_1)+\tau(t_2))}\mathrm{D}_{t_2}(f))\\
&\quad +(-1)^{\tau(t_2)\mathrm{d}(f_{t_2})}\mathrm{D}_{t_2}((-1)^{\tau(t_1)\tau(t_2)}\mathrm{D}_{t_1}(f))\\
&= -(-1)^{\tau(t_1)\tau(t_2)+\mathrm{d}(f)\tau(t_2)}\mathrm{D}_{t_1}\mathrm{D}_{t_2}(f) + (-1)^{\tau(t_2)\mathrm{d}(f)}\mathrm{D}_{t_2}\mathrm{D}_{t_1}(f)\\
&= -(-1)^{\mathrm{d}(f)\tau(t_2)}\mathrm{D}_{t_2}\mathrm{D}_{t_1}(f) + (-1)^{\tau(t_2)\mathrm{d}(f)}\mathrm{D}_{t_2}\mathrm{D}_{t_1}(f)\\
&= 0.\end{aligned}$$ □

定义

$$\mathrm{S}(m,n) := \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D}_{t_1t_2}(f) \mid t_1,t_2 \in Y,\ f \in \mathrm{hg}(\Lambda(m,n))\}.$$

因为 $f \in \mathrm{hg}(\Lambda(m,n))$, $\mathrm{D}_{t_1t_2}$ 是 $\mathbb{Z}_2$- 齐次线性映射, 所以 $\mathrm{S}(m,n)$ 是 $\mathrm{W}(m,n)$ 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间.

引理 2.8 若

$$\mathrm{D}_{t_1t_2}(f)=\sum_{i=1}^{2}f_{t_i}\mathrm{D}_{t_i}\in \mathrm{S}(m,n)_{\theta},\mathrm{D}_{r_1r_2}(g)=\sum_{j=1}^{2}g_{r_j}\mathrm{D}_{r_j}\in \mathrm{S}(m,n)_{\mu},$$

其中 $\theta,\mu\in\mathbb{Z}_2$, 则

$$[\mathrm{D}_{t_1t_2}(f),\mathrm{D}_{r_1r_2}(g)]=\sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{\tau(t_i)(\mathrm{d}(f_{t_i})+\tau(r_j))}\mathrm{D}_{t_ir_j}(f_{t_i}g_{r_j}).$$

证明 由引理 2.7 知, $\sum_{i=1}^{2}(-1)^{\tau(t_i)\mathrm{d}(f_{t_i})}\mathrm{D}_{t_i}(f_{t_i})=0$. 所以

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{\tau(t_i)\mathrm{d}(f_{t_i})}\mathrm{D}_{t_i}(f_{t_i})g_{r_j}\mathrm{D}_{r_j}\\&=\sum_{j=1}^{2}\left(\sum_{i=1}^{2}(-1)^{\tau(t_i)\mathrm{d}(f_{t_i})}\mathrm{D}_{t_i}(f_{t_i})\right)g_{r_j}\mathrm{D}_{r_j}=0.\end{aligned}$$

同理知

$$\sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{\tau(r_j)\mathrm{d}(g_{r_j})}\mathrm{D}_{r_j}(g_{r_j})f_{t_i}\mathrm{D}_{t_i}=0.$$

于是

$$\begin{aligned}&\left[\sum_{i=1}^{2}f_{t_i}\mathrm{D}_{t_i},\sum_{j=1}^{2}g_{r_j}\mathrm{D}_{r_j}\right]\\&=\sum_{i,j=1}^{2}f_{t_i}\mathrm{D}_{t_i}(g_{r_j})\mathrm{D}_{r_j}-(-1)^{\theta\mu}\sum_{i,j=1}^{2}g_{r_j}\mathrm{D}_{r_j}(f_{t_i})\mathrm{D}_{t_i}\\&=\sum_{i,j=1}^{2}\left(f_{t_i}\mathrm{D}_{t_i}(g_{r_j})\mathrm{D}_{r_j}+(-1)^{\tau(t_i)\mathrm{d}(f_{t_i})}\mathrm{D}_{t_i}(f_{t_i})g_{r_j}\mathrm{D}_{r_j}\right)\\&\quad-(-1)^{\theta\mu}\sum_{i,j=1}^{2}\left(g_{r_j}\mathrm{D}_{r_j}(f_{t_i})\mathrm{D}_{t_i}+(-1)^{\tau(r_j)\mathrm{d}(g_{r_j})}\mathrm{D}_{r_j}(g_{r_j})f_{t_i}\mathrm{D}_{t_i}\right)\\&=\sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{\tau(t_i)\mathrm{d}(f_{t_i})}\mathrm{D}_{t_i}(f_{t_i}g_{r_j})\mathrm{D}_{r_j}\\&\quad-(-1)^{\theta\mu}\sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{\tau(r_j)\mathrm{d}(g_{r_j})}\mathrm{D}_{r_j}(g_{r_j}f_{t_i})\mathrm{D}_{t_i}\\&=\sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{\tau(t_i)(\mathrm{d}(f_{t_i})+\tau(r_j))}\big[(-1)^{\tau(t_i)\tau(r_j)}\mathrm{D}_{t_i}(f_{t_i}g_{r_j})\mathrm{D}_{r_j}\\&\quad-(-1)^{\eta}\mathrm{D}_{r_j}(f_{t_i}g_{r_j})\mathrm{D}_{t_i}\big],\end{aligned}\tag{2.8}$$

其中

$$\eta=\theta\mu+\tau(r_j)\mathrm{d}(g_{r_j})+\tau(t_i)\mathrm{d}(f_{t_i})+\tau(t_i)\tau(r_j)+\mathrm{d}(f_{t_i})\mathrm{d}(g_{r_j}).\tag{2.9}$$

易见

$$\theta = \mathrm{d}(f_{t_i}) + \tau(t_i), \quad \mu = \mathrm{d}(g_{r_j}) + \tau(r_j). \tag{2.10}$$

将 (2.10) 式代入 (2.9) 式得

$$\eta = (\mathrm{d}(f_{t_i}) + \mathrm{d}(g_{r_j}))(\tau(t_i) + \tau(r_j)) = \mathrm{d}(f_{t_i} g_{r_j})(\tau(t_i) + \tau(r_j)).$$

于是, 由 (2.8) 式得

$$\left[\sum_{i=1}^{2} f_{t_i}\mathrm{D}_{t_i}, \sum_{j=1}^{2} g_{r_j}\mathrm{D}_{r_j}\right] = \sum_{i,j=1}^{2} (-1)^{\tau(t_i)(\mathrm{d}(f_{t_i})+\tau(r_j))}\mathrm{D}_{t_i r_j}(f_{t_i} g_{r_j}). \qquad \square$$

由引理 2.8 立即可得以下命题.

命题 2.9 S(m,n) 是 W(m,n) 的无限维子代数; 特别地, S(m,n) 是李超代数.

下面定义李超代数 H(m,n), 这里要求 m 为偶数. 设 $m = 2k$. 令

$$i' = \begin{cases} i+k, & 若\ 1 \le i \le k \\ i-k, & 若\ k < i \le 2k \\ i, & 若\ 2k < i \le s, \end{cases} \tag{2.11}$$

$$\sigma(i) = \begin{cases} 1, & 若\ 1 \le i \le k \\ -1, & 若\ k < i \le 2k \\ 1, & 若\ 2k < i \le s. \end{cases} \tag{2.12}$$

定义线性映射 $\mathrm{D_H} : \Lambda(m,n) \to \mathrm{W}(m,n)$, 使得对任意 $f \in \mathrm{hg}(\Lambda(m,n))$, $\mathrm{D_H}(f) = \sum_{i=1}^{s} f_i \mathrm{D}_i$, 其中

$$f_i = \sigma(i')(-1)^{\tau(i')\mathrm{d}(f)}\mathrm{D}_{i'}(f), \quad \forall i \in Y. \tag{2.13}$$

显然, $\mathrm{d}(f_i) = \mathrm{d}(f) + \tau(i') = \mathrm{d}(f) + \tau(i)$, $\forall i \in Y$. 利用 (2.13) 式可直接推得

$$\mathrm{D}_i(f_{j'}) = (-1)^{\tau(i)\tau(j)+(\tau(i)+\tau(j))\mathrm{d}(f)}\sigma(i)\sigma(j)\mathrm{D}_j(f_{i'}), \tag{2.14}$$

其中 $i, j \in Y$. 令

$$\mathrm{H}(m,n) = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D_H}(f) \mid f \in \mathrm{hg}(\Lambda(m,n))\}.$$

易见 $\mathrm{D_H}$ 是偶的线性映射, 又因为 $f \in hg(\Lambda(m,n))$, 所以 H(m,n) 是 W(m,n) 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间.

引理 2.10 若

$$\mathrm{D_H}(f) = \sum_{i=1}^{s} f_i \mathrm{D}_i \in \mathrm{H}(m,n)_\theta, \ \mathrm{D_H}(g) = \sum_{j=1}^{s} g_j \mathrm{D}_j \in \mathrm{H}(m,n)_\mu,$$

其中 $\theta, \mu \in \mathbb{Z}_2$, 则 $[\mathrm{D_H}(f), \mathrm{D_H}(g)] = \mathrm{D_H}(h)$, 这里 $h = \sum_{i=1}^{s} \sigma(i)(-1)^{\tau(i)\mu} f_i g_{i'}$.

证明 由 (2.4) 式知,

$$[\mathrm{D_H}(f),\mathrm{D_H}(g)]=\left[\sum_{i=1}^{s}f_i\mathrm{D}_i,\sum_{j=1}^{s}g_j\mathrm{D}_j\right]=\sum_{j=1}^{s}q_j\mathrm{D}_j,$$

其中

$$q_j=\sum_{i=1}^{s}(f_i\mathrm{D}_i(g_j)-(-1)^{\theta\mu}g_i\mathrm{D}_i(f_j)),\ \forall j\in Y.$$

运用 (2.14) 式, 我们有

$$\begin{aligned}
q_j &= \sum_{i=1}^{s}f_i\mathrm{D}_i(g_j)-(-1)^{\theta\mu}\sum_{i=1}^{s}g_i\mathrm{D}_i(f_j)\\
&= \sum_{i=1}^{s}(-1)^{\tau(i)\tau(j')+(\tau(i)+\tau(j'))\mu}\sigma(i)\sigma(j')f_i\mathrm{D}_{j'}(g_{i'})\\
&\quad -(-1)^{\theta\mu}\sum_{i=1}^{s}(-1)^{\tau(i)\tau(j')+(\tau(i)+\tau(j'))\theta}\sigma(i)\sigma(j')g_i\mathrm{D}_{j'}(f_{i'})\\
&= \sum_{i=1}^{s}(-1)^{\tau(i)\tau(j')+(\tau(i)+\tau(j'))\mu}\sigma(i)\sigma(j')f_i\mathrm{D}_{j'}(g_{i'})\\
&\quad -\sum_{i=1}^{s}(-1)^{\tau(j')(\theta+\mu)+\tau(i')\mu+\tau(i)\tau(i')}\sigma(i)\sigma(j')\mathrm{D}_{j'}(f_{i'})g_i\\
&= \sum_{i=1}^{s}(-1)^{\tau(i)\tau(j')+(\tau(i)+\tau(j'))\mu}\sigma(i)\sigma(j')f_i\mathrm{D}_{j'}(g_{i'})\\
&\quad +\sum_{i=1}^{s}(-1)^{\tau(j')(\theta+\mu)+\tau(i)\mu}\sigma(i)\sigma(j')\mathrm{D}_{j'}(f_i)g_{i'}\\
&= \sigma(j')(-1)^{\tau(j')(\theta+\mu)}\mathrm{D}_{j'}\left(\sum_{i=1}^{s}\sigma(i)(-1)^{\tau(i)\mu}f_ig_{i'}\right)\\
&= \sigma(j')(-1)^{\tau(j')(\theta+\mu)}\mathrm{D}_{j'}(h).
\end{aligned}$$

因为 $\mathrm{D_H}(h)=\sum_{j=1}^{s}h_j\mathrm{D}_j$, 其中

$$h_j=\sigma(j')(-1)^{\tau(j')\mathrm{d}(h)}\mathrm{D}_{j'}(h)=\sigma(j')(-1)^{\tau(j')(\theta+\mu)}\mathrm{D}_{j'}(h),$$

所以 $q_j=h_j$, $\forall j\in Y$. 因此 $[\mathrm{D_H}(f),\mathrm{D_H}(g)]=\mathrm{D_H}(h)$. □

由引理 2.10 可得以下命题.

引理 2.11 $\mathrm{H}(m,n)$ 是 $\mathrm{W}(m,n)$ 的无限维子代数.

最后, 我们定义李超代数 $\mathrm{K}(m,n)$, 这里要求 m 是奇数. 设 $m=2k+1$. 令 $J=Y\backslash\{m\}$, 对任意 $i\in J$, i' 与 $\sigma(i)$ 的定义分别如 (2.11) 与 (2.12) 式.

设 $\widetilde{\mathrm{D}}_k:\Lambda(m,n)\to\mathrm{W}(m,n)$ 是线性映射, 使得对任意 $f\in\mathrm{hg}(\Lambda(m,n))$,

$$\widetilde{\mathrm{D}}_k(f)=\sum_{i=1}^{s}f_i\mathrm{D}_i,$$

其中

$$f_i = (-1)^{\tau(i)\mathrm{d}(f)}(x_i\mathrm{D}_m(f) + \sigma(i')\mathrm{D}_{i'}(f)),\ \forall i \in J, \tag{2.15}$$

$$f_m = 2f - \sum_{i\in J} x_i\mathrm{D}_i(f). \tag{2.16}$$

令

$$G_i = \mathrm{D}_i + \sigma(i)x_{i'}\mathrm{D}_m,\ \forall i \in J, \quad G_m = 2\mathrm{D}_m. \tag{2.17}$$

由引理 2.5 知, 对任意 $i, j \in J$, 有

$$\begin{aligned}[G_i, G_j] &= [\mathrm{D}_i + \sigma(i)x_{i'}\mathrm{D}_m,\ \mathrm{D}_j + \sigma(j)x_{j'}\mathrm{D}_m] \\ &= [\mathrm{D}_i, \sigma(j)x_{j'}\mathrm{D}_m] + [\sigma(i)x_{i'}\mathrm{D}_m, \mathrm{D}_j] \\ &= \delta_{ij'}\sigma(j)\mathrm{D}_m - \delta_{i'j}\sigma(i)\mathrm{D}_m \\ &= 2\delta_{ij'}\sigma(j)\mathrm{D}_m \\ &= \delta_{ij'}\sigma(j)G_m, \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$[G_m, G_j] = 0, \quad \forall j \in J. \tag{2.19}$$

由 (2.17) 式, 直接验证可知, 对任意 $j \in J$, 有

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i\in J}\sigma(i')(-1)^{\tau(i')\mathrm{d}(f)}G_{i'}(f)G_i + fG_m\right)(x_j) \\ &= \sum_{i\in J}\sigma(i')(-1)^{\tau(i')\mathrm{d}(f)}(\mathrm{D}_{i'}(f) + \sigma(i')x_i\mathrm{D}_m(f))(\mathrm{D}_i + \sigma(i)x_{i'}\mathrm{D}_m)(x_j) \\ &= \sigma(j')(-1)^{\tau(j')\mathrm{d}(f)}(\mathrm{D}_{j'}(f) + \sigma(j')x_j\mathrm{D}_m(f)) \\ &= (-1)^{\tau(j')\mathrm{d}(f)}(\sigma(j')\mathrm{D}_{j'}(f) + x_j\mathrm{D}_m(f)) \\ &= \widetilde{\mathrm{D}}_k(f)(x_j);\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i\in J}\sigma(i')(-1)^{\tau(i')\mathrm{d}(f)}G_{i'}(f)G_i + fG_m\right)(x_m) \\ &= \sum_{i\in J}\sigma(i')(-1)^{\tau(i')\mathrm{d}(f)}(\mathrm{D}_{i'}(f) + \sigma(i')x_i\mathrm{D}_m(f))\sigma(i)x_{i'} + 2f \\ &= \sum_{i\in J}\sigma(i')\sigma(i)(-1)^{\tau(i')\mathrm{d}(f)}\mathrm{D}_{i'}(f)x_{i'} + \sum_{i\in J}\sigma(i)(-1)^{\tau(i')\mathrm{d}(f)}x_i\mathrm{D}_m(f)x_{i'} + 2f \\ &= \sum_{i\in J}\sigma(i')\sigma(i)(-1)^{\tau(i')}x_{i'}\mathrm{D}_{i'}(f) + \sum_{i\in J}\sigma(i)x_ix_{i'}\mathrm{D}_m(f) + 2f \\ &= -\sum_{i\in J}x_i\mathrm{D}_i(f) + 2f \\ &= \widetilde{\mathrm{D}}_k(f)(x_m).\end{aligned}$$

于是可得

$$\widetilde{\mathrm{D}}_k(f) = \sum_{i\in J}\sigma(i')(-1)^{\tau(i')\mathrm{d}(f)}G_{i'}(f)G_i + fG_m. \tag{2.20}$$

引理 2.12 设 $f \in \Lambda(m,n)_\theta$, $g \in \Lambda(m,n)_\mu$, 其中 $\theta, \mu \in \mathbb{Z}_2$, 则

$$[\widetilde{\mathrm{D}}_k(f),\ \widetilde{\mathrm{D}}_k(g)] = \widetilde{\mathrm{D}}_k(\langle f,\ g\rangle),$$

其中 $\langle f,\ g\rangle = \widetilde{\mathrm{D}}_k(f)(g) - G_m(f)(g)$.

证明 设 $\widetilde{\mathrm{D}}_k(f) = \sum_{i=1}^s f_iG_i$, $\widetilde{\mathrm{D}}_k(g) = \sum_{i=1}^s g_iG_i$. 由 (2.20) 式可得

$$f_i = \sigma(i')(-1)^{\theta\tau(i')}G_{i'}(f),\quad \forall i \in J,\ f_m = f, \tag{2.21}$$

$$g_i = \sigma(i')(-1)^{\mu\tau(i')}G_{i'}(g),\quad \forall i \in J,\ g_m = g. \tag{2.22}$$

由 (2.17) 式知, $\mathrm{d}(G_i) = \tau(i)$, $\forall i \in Y$, 所以

$$\mathrm{d}(f_i) = \theta + \tau(i),\quad \mathrm{d}(g_i) = \mu + \tau(i),\quad \forall i \in Y. \tag{2.23}$$

若 $i, j \in J$, 由 (2.21) 与 (2.18) 式知

$$\begin{aligned} G_i(f_j) &= G_i\big(\sigma(j')(-1)^{\theta\tau(j')}G_{j'}(f)\big)\\ &= \sigma(j')(-1)^{\theta\tau(j')}\big([G_i, G_{j'}](f) + (-1)^{\tau(i)\tau(j')}G_{j'}G_i(f)\big)\\ &= \sigma(j')\sigma(i)(-1)^{(\theta+\tau(i))\tau(j')+\theta\tau(i)}G_{j'}(f_{i'}) + \delta_{ij}(-1)^{\theta\tau(j')}G_m(f). \end{aligned} \tag{2.24}$$

同理知

$$G_i(g_j) = \sigma(j')\sigma(i)(-1)^{(\mu+\tau(i))\tau(j')+\mu\tau(i)}G_{j'}(g_{i'}) + \delta_{ij}(-1)^{\mu\tau(j')}G_m(g). \tag{2.25}$$

由引理 2.5 与 (2.23)~(2.25) 式, 可算得

$$[\widetilde{\mathrm{D}}_k(f),\ \widetilde{\mathrm{D}}_k(g)] = \left[\sum_{i=1}^s f_iG_i,\ \sum_{i=1}^s g_iG_i\right] = \sum_{j\in J} h_jG_j + h_mG_m,$$

其中

$$\begin{aligned} h_j =& \sum_{i\in J} f_iG_i(g_j) - (-1)^{\theta\mu}\sum_{i\in J} g_iG_i(f_j) + f_mG_m(g_j)\\ &-(-1)^{\theta\mu}g_mG_m(f_j)\\ =& \sum_{i\in J}\sigma(j')\sigma(i)(-1)^{\mu\tau(j')+\tau(i)\tau(j')+\mu\tau(i)}f_iG_{j'}(g_{i'})\\ &-(-1)^{\theta\mu}\sum_{i\in J}\sigma(j')\sigma(i)(-1)^{\mu\tau(j')+\tau(i)\tau(j')+\theta\tau(i)}g_iG_{j'}(f_{i'})\\ &+(-1)^{\mu\tau(j')}f_jG_m(g) - (-1)^{\theta\mu+\theta\tau(j')}g_jG_m(f)\\ &+fG_m(g_j) - (-1)^{\theta\mu}gG_m(f_j)\\ =& \sigma(j')(-1)^{\tau(j')\mu}\sum_{i\in J}\sigma(i)(-1)^{\tau(i)\tau(j')+\mu\tau(i)}f_iG_{j'}(g_{i'})\\ &-\sigma(j')(-1)^{\theta\mu+\theta\tau(j')}\sum_{i\in J}\sigma(i')(-1)^{\tau(i')\tau(j')+\theta\tau(i')}g_{i'}G_{j'}(f_i) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sigma(j')(-1)^{\mu\tau(j')+\theta\tau(j')}G_{j'}(f)G_m(g)\\
&-\sigma(j')(-1)^{\theta\mu+(\theta+\mu)\tau(j')}G_{j'}(g)G_m(f)+fG_m(g_j)\\
&-(-1)^{\theta\mu}gG_m(f_j)\\
=\ &\sigma(j')(-1)^{\tau(j')(\theta+\mu)}\sum_{i\in J}\sigma(i)(-1)^{\mu\tau(i)+\tau(j')(\theta+\tau(i))}f_iG_{j'}(g_{i'})\\
&+\sigma(j')(-1)^{\tau(j')(\theta+\mu)}\sum_{i\in J}\sigma(i)(-1)^{\mu\tau(i)}G_{j'}(f_i)g_{i'}\\
&+\sigma(j')(-1)^{\tau(j')(\theta+\mu)}G_{j'}(f)G_m(g_i)\\
&-\sigma(j')(-1)^{\tau(j')(\theta+\mu)+\tau(j')\theta}G_m(f)G_{j'}(g)\\
&+fG_m\big(\sigma(j')(-1)^{\mu\tau(j')}G_{j'}(g)\big)\\
&-(-1)^{\theta\mu}gG_m\big(\sigma(j')(-1)^{\theta\tau(j')}G_{j'}(f)\big)\\
=\ &\sigma(j')(-1)^{\tau(j')(\theta+\mu)}\sum_{i\in J}\sigma(i)(-1)^{\mu\tau(i)}G_{j'}(f_ig_{i'})\\
&+\sigma(j')(-1)^{\tau(j')(\theta+\mu)}G_{j'}(fG_m(g)-G_m(f)g)\\
=\ &\sigma(j')(-1)^{\tau(j')(\theta+\mu)}G_{j'}\left(\sum_{i\in J}\sigma(i)(-1)^{\mu\tau(i)}f_ig_{i'}\right.\\
&\left.+f_mG_m(g)-G_m(f)g\right)\\
=\ &\sigma(j')(-1)^{\tau(j')(\theta+\mu)}G_{j'}\left(\sum_{i\in J}f_iG_i(g)+f_mG_m(g)-G_m(f)g\right)\\
=\ &\sigma(j')(-1)^{\tau(j')(\theta+\mu)}G_{j'}(\langle f,g\rangle).
\end{aligned}
$$

由 (2.20) 式知, h_j 等于 $\widetilde{\mathrm{D}}_k(\langle f,g\rangle)$ 中 G_j 的系数, 这里 $j\in J$. 由引理 2.5 与 (2.18)~(2.23) 式, 有

$$
\begin{aligned}
h_m\ =\ &\sum_{i\in J}f_iG_i(g)-(-1)^{\theta\mu}\sum_{i\in J}g_iG_i(f)+fG_m(g)\\
&-(-1)^{\theta\mu}gG_m(f)+\sum_{i\in J}\sigma(i')(-1)^{\tau(i)(\mu+\tau(i'))}f_ig_{i'}\\
=\ &\sum_{i\in J}\sigma(i)(-1)^{\mu\tau(i)}f_ig_{i'}-(-1)^{\theta\mu}\sum_{i\in J}\sigma(i)(-1)^{\theta\tau(i)}g_if_{i'}\\
&+fG_m(g)-(-1)^{\theta\mu}gG_m(f)+\sum_{i\in J}\sigma(i')(-1)^{\tau(i)(\mu+\tau(i'))}f_ig_{i'}\\
=\ &-(-1)^{\theta\mu}\sum_{i\in J}\sigma(i)(-1)^{\theta\tau(i)}g_if_{i'}+fG_m(g)-(-1)^{\theta\mu}gG_m(f)\\
=\ &-(-1)^{\theta\mu}\sum_{i\in J}\sigma(i')(-1)^{\mu\tau(i')}G_{i'}(g)G_i(f)+fG_m(g)-G_m(f)g\\
=\ &\sum_{i\in J}\sigma(i)(-1)^{\tau(i')\theta}G_i(f)G_{i'}(g)+fG_m(g)-G_m(f)g
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i\in J} \sigma(i')(-1)^{\tau(i)\theta} G_{i'}(f)G_i(g) + fG_m(g) - G_m(f)g$$
$$= \widetilde{\mathrm{D}}_k(f)(g) - G_m(f)g$$
$$= \langle f,\ g\rangle$$
$$= \widetilde{\mathrm{D}}_k(\langle f,\ g\rangle)\text{中 } G_m\text{的系数}.$$

这就证明了 $[\widetilde{\mathrm{D}}_k(f),\ \widetilde{\mathrm{D}}_k(g)] = \widetilde{\mathrm{D}}_k(\langle f,\ g\rangle)$. □

由引理 2.12, 直接得出以下命题.

命题 2.13 $\mathrm{K}(m,n)$ 是 $\mathrm{W}(m,n)$ 的无限维子代数.

我们称 $\mathrm{W}(m,n)$, $\mathrm{S}(m,n)$, $\mathrm{H}(m,n)$, 和 $\mathrm{K}(m,n)$ 为无限维 Cartan 型模李超代数.

设

$$\Lambda(m,n)_i = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(\alpha)}x^u \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^m,\ u \in B(n),\ |\alpha| + |u| = i\}.$$

显然 $\Lambda(m,n) = \bigoplus_{i\geq 0}\Lambda(m,n)_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化的结合超代数. 设

$$\underline{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_m) \in \mathbb{N}^m,\ \pi_i = p^{t_i} - 1,\ \forall i \in Y_0.$$

这里 p 总表示基域 $\mathbb{F}$ 的特征数. 令

$$A(m,\underline{t}) = \{\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m \mid 0 \leq \alpha_i \leq \pi_i,\ i \in Y_0\},$$

$$\Lambda(m,n,\underline{t}) = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(\alpha)}x^u \mid \alpha \in A(m,\underline{t}),\ u \in B(n)\}.$$

命题 2.14 设 $\alpha, \beta \in A(m,\underline{t})$, 其中 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_m)$. 若 $\alpha + \beta \notin A(m,\underline{t})$, 则 $\binom{\alpha+\beta}{\alpha} = 0$.

证明 因为 $\alpha+\beta \notin A(m,\underline{t})$, 所以存在 $i \in Y_0$, 使得 $\alpha_i + \beta_i > \pi_i$. 由于 $\alpha, \beta \in A(m,\underline{t})$, 所以 $\alpha_i, \beta_i \leq \pi_i < p^{t_i}$.

设 X_1 与 X_2 是域 $\mathbb{F}$ 上的未定元. 在二元多项式 $(X_1 + X_2)^{\alpha_i+\beta_i}$ 的展开式中, 项 $X_1^{\beta_i}X_2^{\alpha_i}$ 的系数是 $\binom{\alpha_i+\beta_i}{\alpha_i}$. 由于 $\alpha_i + \beta_i - p^{t_i} < \beta_i$ 和 $\alpha_i + \beta_i - p^{t_i} < \alpha_i$, 所以在 $(X_1 + X_2)^{\alpha_i+\beta_i-p^{t_i}}\left(X_1^{p^{t_i}} + X_2^{p^{t_i}}\right)$ 的展开式中, 项 $X_1^{\beta_i}X_2^{\alpha_i}$ 的系数是零. 由于

$$\begin{aligned}(X_1 + X_2)^{\alpha_i+\beta_i} &= (X_1 + X_2)^{\alpha_i+\beta_i-p^{t_i}}(X_1 + X_2)^{p^{t_i}}\\ &= (X_1 + X_2)^{\alpha_i+\beta_i-p^{t_i}}\left(X_1^{p^{t_i}} + X_2^{p^{t_i}}\right),\end{aligned}$$

所以 $\binom{\alpha_i+\beta_i}{\alpha_i} = 0$. 于是 $\binom{\alpha+\beta}{\alpha} = 0$. □

推论 2.15 $\Lambda(m,n,\underline{t})$ 是 $\Lambda(m,n)$ 的有限维子代数.

令 $\Lambda(m,n,\underline{t})_i = \Lambda(m,n)_i \bigcap \Lambda(m,n,\underline{t})$. 则 $\Lambda(m,n,\underline{t}) = \bigoplus_{i=0}^{\xi}\Lambda(m,n,\underline{t})_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化超代数, 其中 $\xi := \sum_{i=1}^{n}\pi_i + n$. 令

$$\mathrm{W}(m,n,\underline{t}) = \left\{\sum_{i=1}^{s} f_i\mathrm{D}_i \mid f_i \in \Lambda(m,n,\underline{t}),\ \ \forall i \in Y\right\}.$$

由 (2.4) 式与推论 2.15 知, $\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$ 是 $\mathrm{W}(m,n)$ 的有限维子代数. 设

$$\mathrm{S}(m,n,\underline{t})=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D}_{ij}(f)\mid i,j\in Y,\ f\in\Lambda(m,n,\underline{t})\},$$

$$\overline{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})=\{\mathrm{D}_{\mathrm{H}}(f)\mid f\in\Lambda(m,n,\underline{t})\},\ \text{其中 } m=2k \text{ 是偶数}.$$

$$\overline{\mathrm{K}}(m,n,\underline{t})=\{\widetilde{\mathrm{D}}_k(f)\mid f\in\Lambda(m,n,\underline{t})\},\ \text{其中 } m=2k+1\text{是奇数}.$$

由引理 2.8, 2.10, 2.12 与推论 2.15 知, $\mathrm{S}(m,n,\underline{t}),\overline{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})$ 与 $\overline{\mathrm{K}}(m,n,\underline{t})$ 是 $\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$ 的子代数.

下面考察 $\overline{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})$ 的换位子代数. 由 (2.13) 式知,

$$\mathrm{D}_{\mathrm{H}}(f)=\sum_{i=1}^{s}\sigma(i)(-1)^{\tau(i)\mathrm{d}(f)}\mathrm{D}_i(f)\mathrm{D}_{i'}. \tag{2.26}$$

由引理 2.10 可推得

$$\left[\mathrm{D}_{\mathrm{H}}(f),\mathrm{D}_{\mathrm{H}}(g)\right]=\mathrm{D}_{\mathrm{H}}\left(\sum_{i=1}^{s}\sigma(i)(-1)^{\tau(i)\mathrm{d}(f)}\mathrm{D}_i(f)\mathrm{D}_{i'}(g)\right). \tag{2.27}$$

令

$$\mathrm{H}(m,n,\underline{t})=\left\{\mathrm{D}_{\mathrm{H}}(f)\mid f\in\bigoplus_{i=0}^{\xi-1}\Lambda(m,n,\underline{t})_i\right\}.$$

置 $\pi:=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_m)\in A(m,\underline{t})$, $E:=\langle m+1,m+2,\cdots,s\rangle\in B(n)$. 则 $\Lambda(m,n,\underline{t})_\xi=\mathbb{F}x^{(\pi)}x^E$.

命题 2.16 设 $L=\overline{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})$, 则 $[L,L]=\mathrm{H}(m,n,\underline{t})$.

证明 设 $\mathrm{D}_{\mathrm{H}}(x^{(\alpha)}x^u),\mathrm{D}_{\mathrm{H}}(x^{(\beta)}x^v)\in L$. 由 (2.27) 式知

$$\begin{aligned}&\left[\mathrm{D}_{\mathrm{H}}(x^{(\alpha)}x^u),\mathrm{D}_{\mathrm{H}}(x^{(\beta)}x^v)\right]\\&=\mathrm{D}_{\mathrm{H}}\left(\sum_{i=1}^{s}\sigma(i)(-1)^{\tau(i)\mathrm{d}(x^u)}\mathrm{D}_i(x^{(\alpha)}x^u)\mathrm{D}_{i'}(x^{(\beta)}x^v)\right)\\&=\mathrm{D}_{\mathrm{H}}\left(\sum_{i=1}^{m}\sigma(i)\mathrm{D}_i(x^{(\alpha)})x^u\mathrm{D}_{i'}(x^{(\beta)})x^v\right)\\&\quad+\mathrm{D}_{\mathrm{H}}\left(\sum_{i=m+1}^{s}(-1)^{\mathrm{d}(x^u)}x^{(\alpha)}\partial_i(x^u)x^{(\beta)}\partial_i(x^v)\right).\end{aligned}$$

因为 $\partial_i(x^u)\partial_i(x^v)\notin\mathbb{F}x^E$, 所以

$$\mathrm{D}_{\mathrm{H}}\left(\sum_{i=m+1}^{s}(-1)^{\mathrm{d}(x^u)}x^{(\alpha)}\partial_i(x^u)x^{(\beta)}\partial_i(x^v)\right)\in\mathrm{D}_{\mathrm{H}}\left(\bigoplus_{i=0}^{\xi-1}\Lambda(m,n,\underline{t})_i\right).$$

易见

$$\mathrm{D}_{\mathrm{H}}\left(\sum_{i=1}^{m}\sigma(i)\mathrm{D}_i(x^{(\alpha)})x^u\mathrm{D}_{i'}(x^{(\beta)})x^v\right)\quad.$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sigma(i) \binom{\alpha+\beta-\varepsilon_i-\varepsilon_{i'}}{\alpha-\varepsilon_i} \mathrm{D_H}\big(x^{(\alpha+\beta-\varepsilon_i-\varepsilon_{i'})}\big)x^u x^v$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left[\binom{\alpha+\beta-\varepsilon_i-\varepsilon_{i'}}{\alpha-\varepsilon_i} - \binom{\alpha+\beta-\varepsilon_i-\varepsilon_{i'}}{\alpha-\varepsilon_{i'}}\right] \mathrm{D_H}\big(x^{(\alpha+\beta-\varepsilon_i-\varepsilon_{i'})}\big)x^u x^v.$$

利用同余式

$$\binom{\pi}{\gamma} \equiv (-1)^{|\gamma|} \pmod p, \quad 这里 \quad 0 \le \gamma \le \pi,$$

可知, 若 $\alpha+\beta-\varepsilon_i-\varepsilon_{i'}=\pi$, 则

$$\binom{\alpha+\beta-\varepsilon_i-\varepsilon_{i'}}{\alpha-\varepsilon_i} - \binom{\alpha+\beta-\varepsilon_i-\varepsilon_{i'}}{\alpha-\varepsilon_{i'}} = (-1)^{|\alpha-\varepsilon_i|} - (-1)^{|\alpha-\varepsilon_{i'}|} = 0.$$

所以

$$\mathrm{D_H}\left(\sum_{i=1}^{s} \sigma(i)\mathrm{D}_i(x^{(\alpha)})x^u \mathrm{D}_{i'}(x^{(\beta)})x^v\right) \in \mathrm{D_H}\left(\bigoplus_{i=0}^{\xi-1} \Lambda(m,n,\underline{t})_i\right).$$

于是 $[L,L] \subseteq \mathrm{H}(m,n,\underline{t})$.

反之, 设 $\mathrm{D_H}(x^{(\alpha)}x^u) \in \mathrm{H}(m,n,\underline{t})$, 则 $(\alpha,u) \neq (\pi,E)$. 若 $\alpha \neq \pi$, 则存在 $i \in Y_0$, 使得 $\mathrm{D_H}(x^{(\alpha+\varepsilon_i)}x^u) \in \overline{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})$. 于是

$$\mathrm{D_H}(x^{(\alpha)}x^u) = \sigma(i)\Big[\mathrm{D_H}(x^{(\alpha+\varepsilon_i)}x^u), \mathrm{D_H}(x_{i'})\Big] \in [L,L].$$

若 $u \neq E$, 则存在 $i \in Y_1$, 使得 $0 \neq \mathrm{D_H}(x^{(\alpha)}x_i x^u) \in \overline{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})$. 则

$$\mathrm{D_H}(x^{(\alpha)}x^u) = -\Big[\mathrm{D_H}(x_i), \mathrm{D_H}(x^{(\alpha)}x_i x^u)\Big] \in [L,L].$$

所以 $\mathrm{H}(m,n,\underline{t}) \subseteq [L,L]$; 因此 $[L,L] = \mathrm{H}(m,n,\underline{t})$. □

下面我们给出 $\overline{\mathrm{K}}(m,n,\underline{t})$ 的另一种表述方法. 我们将线性映射 $\widetilde{\mathrm{D}}_k$ 在 $\Lambda(m,n,\underline{t})$ 上的限制仍记为 $\widetilde{\mathrm{D}}_k$, 即

$$\widetilde{\mathrm{D}}_k : \Lambda(m,n,\underline{t}) \to \overline{\mathrm{K}}(m,n,\underline{t}).$$

设 $f \in \ker \widetilde{\mathrm{D}}_k$, 由 (2.15) 式知

$$(-1)^{\tau(i)\mathrm{d}(f)}\big(x_i \mathrm{D}_m(f) + \sigma(i')\mathrm{D}_{i'}(f)\big) = 0, \quad \forall i \in J.$$

所以

$$\mathrm{D}_i(f) = -\sigma(i)x_{i'}\mathrm{D}_m(f), \quad \forall i \in J.$$

由 (2.16) 式知, $2f - \sum_{i\in J} x_i \mathrm{D}_i(f) = 0$, 于是

$$f = \frac{1}{2}\sum_{i\in J} x_i \mathrm{D}_i(f) = -\frac{1}{2}\sum_{i\in J}\sigma(i)x_i x_{i'}\mathrm{D}_m(f) = 0.$$

因此 $\ker \widetilde{\mathrm{D}}_k = 0$, 故 $\widetilde{\mathrm{D}}_k$ 是单射.

在 $\Lambda(m,n,\underline{t})$ 中定义 [,] 运算, 使得对任意的 $f,g\in\Lambda(m,n,\underline{t})$, 有

$$[f,g]=\widetilde{\mathrm{D}}_k(f)(g)-G_m(f)g. \tag{2.28}$$

由引理 2.12 知

$$\widetilde{\mathrm{D}}_k([f,g])=\left[\widetilde{\mathrm{D}}_k(f),\widetilde{\mathrm{D}}_k(g)\right]. \tag{2.29}$$

注意到 $\widetilde{\mathrm{D}}_k$ 是单射, 于是可推得 $\Lambda(m,n,\underline{t})$ 的 [,] 运算满足 (1.1) 与 (1.2) 式, 从而 $\Lambda(m,n,\underline{t})$ 是一个李超代数. 由 (2.29) 式知, 作为李超代数, $\Lambda(m,n,\underline{t})\cong\overline{\mathrm{K}}(m,n,\underline{t})$. 我们将 $\Lambda(m,n,\underline{t})$ 关于 (2.28) 式定义的李超代数仍记为 $\overline{\mathrm{K}}(m,n,\underline{t})$. 由 (2.20) 与 (2.17) 式可知, 对 $f,g\in\overline{\mathrm{K}}(m,n,\underline{t})$,

$$\begin{aligned}
[f,g]=&\sum_{i\in J}\sigma(i')(-1)^{\tau(i')\mathrm{d}(f)}\mathrm{D}_{i'}(f)\mathrm{D}_i(g)\\
&+\sum_{i\in J}\sigma(i')(-1)^{\tau(i')\mathrm{d}(f)}\sigma(i)\mathrm{D}_{i'}(f)x_{i'}\mathrm{D}_m(g)+2f\mathrm{D}_m(g)\\
&+\sum_{i\in J}\sigma(i')(-1)^{\tau(i')}\sigma(i')x_i\mathrm{D}_m(f)\mathrm{D}_i(g)-2\mathrm{D}_m(f)g\\
&+\sum_{i\in J}\sigma(i')(-1)^{\tau(i')\mathrm{d}(f)}\sigma(i')\sigma(i)x_i\mathrm{D}_m(f)x_{i'}\mathrm{D}_m(g)\\
=&\left(2f-\sum_{i\in J}x_i\mathrm{D}_i(f)\right)\mathrm{D}_m(g)\\
&-(-1)^{\mathrm{d}(f)\mathrm{d}(g)}\left(2g-\sum_{i\in J}x_i\mathrm{D}_i(g)\right)\mathrm{D}_m(f)\\
&+\sum_{i\in J}\sigma(i)(-1)^{\tau(i)\mathrm{d}(f)}\mathrm{D}_i(f)\mathrm{D}_{i'}(g).
\end{aligned} \tag{2.30}$$

命题 2.17　设 $\mathrm{K}(m,n,\underline{t})=[L,L]$, 其中 $L=\overline{\mathrm{K}}(m,n,\underline{t})$. 若 $n-m-3\not\equiv 0 \pmod p$, 则 $\mathrm{K}(m,n,\underline{t})=L$. 若 $n-m-3\equiv 0 \pmod p$, 则 $\mathrm{K}(m,n,\underline{t})=\bigoplus_{i=0}^{\xi-1}\Lambda(m,n,\underline{t})_i$.

证明　若 $\alpha_m\neq\pi_m$, 则 $x^{(\alpha+\varepsilon_m)}x^u\in L$, $\forall u\in B(n)$. 于是 $2x^{(\alpha)}x^u=\left[1,x^{(\alpha+\varepsilon_m)}x^u\right]\in\mathrm{K}(m,n,\underline{t})$. 因为 $\mathrm{char}\mathbb{F}\neq 2$, 所以 $x^{(\alpha)}x^u\in\mathrm{K}(m,n,\underline{t})$. 若有某个 $j\in Y_0\backslash\{m\}$, 使得 $\alpha_j\neq\pi_j$, 则 $x^{(\alpha+\varepsilon_j)}x^u\in L$, $\forall u\in B(n)$. 故

$$\sigma(j')x^{(\alpha)}x^u=\left[x_{j'},x^{(\alpha+\varepsilon_j)}x^u\right]-\left(\alpha_{j'}+1\right)x^{(\alpha+\varepsilon_j+\varepsilon_{j'}-\varepsilon_m)}x^u\in\mathrm{K}(m,n,\underline{t}).$$

若 $u\neq E$, 则存在 $j\in Y_1$, 使得 $x_jx^u\neq 0$. 因此

$$(-1)^{\mathrm{d}(x_jx^u)}x^{(\alpha)}x^u=\left[x_j,x^{(\alpha)}x_jx^u\right]\in\mathrm{K}(m,n,\underline{t}).$$

综上知, $\bigoplus_{i=0}^{\xi-1}\Lambda(m,n,\underline{t})_i\subseteq\mathrm{K}(m,n,\underline{t})$.

若 $n-m-3\not\equiv 0 \pmod p$, 则由

$$(n-m-3)x^{(\pi)}x^E=\left[x_m,x^{(\pi)}x^E\right]\in\mathrm{K}(m,n,\underline{t}).$$

知, $\mathrm{K}(m,n,\underline{t}) = L = \overline{\mathrm{K}}(m,n,\underline{t})$.

若 $n-m-3 \equiv 0 \pmod p$, 任取 $x^{(\alpha)}x^u,\ x^{(\beta)}x^v \in L$, 由 (2.30) 式知, $\left[x^{(\alpha)}x^u,\ x^{(\beta)}x^v\right] = \eta + \rho$, 其中

$$\begin{aligned}\eta =& \left(2x^{(\alpha)}x^u - \sum_{i\in J} x_i\mathrm{D}_i\left(x^{(\alpha)}x^u\right)\right)\mathrm{D}_m\left(x^{(\beta)}x^v\right)\\ &-(-1)^{\mathrm{d}(x^u)\mathrm{d}(x^v)}\left(2x^{(\beta)}x^v - \sum_{i\in J} x_i\mathrm{D}_i\left(x^{(\beta)}x^v\right)\mathrm{D}_m\left(x^{(\alpha)}x^u\right)\right)\\ \rho =& \sum_{i\in J}\sigma(i)(-1)^{\tau(i)\mathrm{d}(x^u)}\mathrm{D}_i\left(x^{(\alpha)}x^u\right)\mathrm{D}_{i'}\left(x^{(\beta)}x^v\right).\end{aligned}$$

由引理 2.16 的证明知, $\rho \in \bigoplus_{i=0}^{\xi-1}\Lambda(m,n,\underline{t})_i$. 直接计算知

$$\begin{aligned}\eta =& \left(2-\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i - |u|\right)\binom{\alpha+\beta-\varepsilon_m}{\alpha}x^{(\alpha+\beta-\varepsilon_m)}x^ux^v\\ &-\left(2-\sum_{i=1}^{m-1}\beta_i - |v|\right)\binom{\alpha+\beta-\varepsilon_m}{\beta}x^{(\alpha+\beta-\varepsilon_m)}x^ux^v.\end{aligned}$$

若 $x^{(\alpha+\beta-\varepsilon_m)}x^ux^v = \lambda x^{(\pi)}x^E$, 其中 $0 \neq \lambda \in \mathbb{F}$, 则 $\alpha+\beta-\varepsilon_m = \pi$, $|u|+|v| = n$. 因为 $|\alpha|+|\beta| = |\alpha+\beta| = |\pi+\varepsilon_m|$ 是奇数, 所以 $(-1)^{|\beta|} = -(-1)^{|\alpha|}$. 再利用同余式

$$\binom{\pi}{\alpha} \equiv (-1)^{|\alpha|} \pmod p, \quad \binom{\pi}{\beta} \equiv (-1)^{|\beta|} \pmod p$$

可推得

$$\eta = \left(4-\sum_{i=1}^{m-1}\pi_i - n\right)(-1)^{\alpha}x^{(\pi)}x^ux^v = -(n-m-3)(-1)^{|\alpha|}x^{(\pi)}x^ux^v.$$

由 $n-m-3 \equiv 0 \pmod p$ 知 $\eta = 0$, 所以 $x^{(\pi)}x^E \notin \mathrm{K}(m,n,\underline{t})$. 于是可得 $\mathrm{K}(m,n,\underline{t}) = \bigoplus_{i=0}^{\xi-1}\Lambda(m,n,\underline{t})_i$. □

我们称 $\mathrm{W}(m,n,\underline{t}), \mathrm{S}(m,n,\underline{t}), \mathrm{H}(m,n,\underline{t})$ 与 $\mathrm{K}(m,n,\underline{t})$ 为有限维 Cartan 型模李超代数.

第二章 单性与导子超代数

在第一章, 我们定义了四类有限维 Cartan 型李超代数. 我们将在本章证明它们是单李超代数. 进而确定它们的导子超代数. 在本章中, 我们设基域 $\mathbb{F}$ 的特征数 p 大于 3.

§1 单 性 [106]

本节讨论四类 Cartan 型模李超代数的单性.

引理 1.1 *设 $G=\bigoplus_{i\geq -1}G_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数, 并且 $G_{-1}\neq 0$. 设 I 是 G 的非零理想. 若 G 是可迁的与不可约的, 则 $G_{-1}\subseteq I$.*

证明 由第一章引理 1.4 的 2) 知, $I\cap G_{-1}$ 是 G 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间. 从而 $I\cap G_{-1}$ 是 G_{-1} 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间, 进而可知 $I\cap G_{-1}$ 是 G_{-1} 的 G_0- 子模. 因为 G 是不可约的, 所以 $I\cap G_{-1}=0$ 或者 $I\cap G_{-1}=G_{-1}$.

令 $\overline{G}_i=\bigoplus_{j=-1}^{i}G_j$, $\forall i\geq -1$. 若 $I\cap G_{-1}=0$, 则存在极小的非负整数 n, 使得 $I\cap\overline{G}_n\neq 0$. 任取 $I\cap\overline{G}_n$ 的一个非零元素 x, 可设 $x=\sum_{i=-1}^{n}x_i$, 其中 $x_i\in G_i$. 由 $I\cap\overline{G}_{n-1}=0$ 知 $x_n\neq 0$. 因为 $[x,G_{-1}]\subseteq\overline{G}_{n-1}$ 与 $[x,G_{-1}]\subseteq I$, 所以 $[x,G_{-1}]\subseteq I\cap\overline{G}_{n-1}=0$. 因此 $[\sum_{i=-1}^{n}x_i,G_{-1}]=0$. 于是 $\sum_{i=0}^{n}[x_i,G_{-1}]=0$. 由此得 $[x_i,G_{-1}]=0,\ i=0,1,\cdots,n$. 特别地, $[x_n,G_{-1}]=0$. 此与 G 的可迁性矛盾, 所以 $I\cap G_{-1}\neq 0$. 故 $I\cap G_{-1}=G_{-1}$, 从而 $G_{-1}\subseteq I$. □

在本节中, 我们用 W, S, H 与 K 分别表示有限维 Cartan 型模李超代数 $\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$, $\mathrm{S}(m,n,\underline{t})$, $\mathrm{H}(m,n,\underline{t})$ 与 $\mathrm{K}(m,n,\underline{t})$, 这里 $m,n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$. 利用第一章 §2 的结果, 分别验证可知, W, S, H 与 K 有如下的 $\mathbb{Z}$- 阶化, 使得它们是 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数: $\mathrm{W}=\bigoplus_{i=-1}^{\xi-1}\mathrm{W}_i$, 其中 $\xi:=\sum_{i=1}^{m}\pi_i+n$,

$$\mathrm{W}_i=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j\,\big|\,|\alpha|+|u|=i+1,\ j\in Y\}.$$

$\mathrm{S}=\bigoplus_{i=-1}^{\xi-2}\mathrm{S}_i$, 其中

$$\mathrm{S}_i=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^u)\,\big|\,|\alpha|+|u|=i+2,\ i,j\in Y\}.$$

$\mathrm{H}=\bigoplus_{i=-1}^{\xi-3}\mathrm{H}_i$, 其中

$$\mathrm{H}_i=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D_H}(x^{(\alpha)}x^u)\,\big|\,|\alpha|+|u|=i+2\}.$$

$\mathrm{K}=\bigoplus_{i=-2}^{\lambda}\mathrm{K}_i$, 其中

$$\mathrm{K}_i=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(\alpha)}x^u\,\big|\,|\alpha|+\alpha_m+|u|=i+2\}.$$

若 $n-m-3\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$, 则 $\lambda=\xi+\pi_m-2$; 若 $n-m-3\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$, 则 $\lambda=\xi+\pi_m-3$.

易见 $\mathrm{W}_{-1} = \mathrm{S}_{-1} = \mathrm{H}_{-1} = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D}_i \mid i \in Y\}$; $\mathrm{K}_{-2} = \mathbb{F}1$, $\mathrm{K}_{-1} = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x_i \mid i \in Y\backslash\{m\}\}$.

命题 1.2 W 是单李超代数.

证明 任取 $D = \sum_{i=1}^{s} f_i\mathrm{D}_i \in \mathrm{W}_k$, 其中 $k \in \mathbb{N}_0$. 若 $[D, \mathrm{W}_{-1}] = 0$, 则

$$\left[\sum_{i=1}^{s} f_i\mathrm{D}_i, \mathrm{D}_j\right] = -\sum_{i=1}^{s}(-1)^{(\tau(i)+\mathrm{d}(f_i))\tau(j)}\mathrm{D}_j(f_i)\mathrm{D}_i = 0.$$

故 $\mathrm{D}_j(f_i) = 0$, $\forall j \in Y$. 于是 $f_i \in \Lambda(m,n,\underline{t})_0 \cap \Lambda(m,n,\underline{t})_{k+1} = 0$, $\forall i \in Y$, 所以 $D = 0$, 因此 W 是可迁的.

令 M 是 W_0- 模 W_{-1} 的非零子模. 设 $0 \neq \sum_{i=1}^{s} a_i\mathrm{D}_i \in M$, 其中 $a_i \in \mathbb{F}$. 又设 $a_j \neq 0$, 则 $[x_j\mathrm{D}_j, \sum_{i=1}^{s} a_i\mathrm{D}_i] = -a_j\mathrm{D}_j \in M$. 所以 $\mathrm{D}_j \in M$. 任取 $i \in Y$, 则 $[x_j\mathrm{D}_i, \mathrm{D}_j] = -(-1)^{(\tau(j)+\tau(i))\tau(j)}\mathrm{D}_i \in M$. 故 $\mathrm{D}_i \in M$, $\forall i \in Y$, 从而 $M = \mathrm{W}_{-1}$. 所以 W 是不可约的.

设 I 是 W 的任一非零理想, 由引理 1.1 知, $\mathrm{W}_{-1} \subseteq I$. 于是 $\mathrm{D}_i \subseteq I$, $\forall i \in Y$.

(i) 设 $x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j \in \mathrm{W}$, 其中 $j \in Y$, $(\alpha, u) \neq (\pi, E)$, $E = \langle m+1, m+2, \cdots, s\rangle$. 设 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$, $u = \langle i_1, \cdots, i_t\rangle$. 令 $\beta_i = \pi - \alpha_i$, $\forall i \in Y_0$. 设 $v = \langle j_1, \cdots, j_t\rangle \in B(n)$, 使得 $\{u\} \cup \{v\} = Y_1$, $\{u\} \cap \{v\} = \varnothing$. 则

$$x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j = \lambda\left(\prod_{i=1}^{m}(\mathrm{ad}\mathrm{D}_i)^{\beta_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{t}\mathrm{ad}\mathrm{D}_{j_i}\right)\left(x^{(\pi)}x^E\mathrm{D}_j\right),$$

其中 $\lambda = 1$ 或 -1. 因为 $\mathrm{W}_{-1} \subseteq I$, 所以上式右边为 I 中元素. 故 $x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j \in I$.

(ii) 由 (i) 知, $x^{(\pi-\varepsilon_1)}x^E\mathrm{D}_j \in I$, $\forall j \in Y\backslash\{1\}$. 所以

$$x^{(\pi)}x^E\mathrm{D}_j = \left[x^{(2\varepsilon_1)}\mathrm{D}_1,\ x^{(\pi-\varepsilon_1)}x^E\mathrm{D}_j\right] \in I.$$

设 $k \in Y\backslash\{1\}$, 则

$$x^{(\pi)}x^E\mathrm{D}_1 = \left[x^{(\pi)}x^E\mathrm{D}_k,\ x_k\mathrm{D}_1\right] \in I.$$

所以 $I = \mathrm{W}$. 因此 W 是单李超代数. □

为方便, 我们先给出下一个命题所需要的运算等式. 由第一章引理 2.8 知

$$\mathrm{D}_{ij}(f) = (-1)^{\tau(i)\tau(j)}\mathrm{D}_i(f)\mathrm{D}_j - (-1)^{(\tau(i)+\tau(j))\mathrm{d}(f)}\mathrm{D}_j(f)\mathrm{D}_i, \tag{1.1}$$

其中 $i, j \in Y$. 由 (1.1) 式、第一章 (2.4) 式与等式 $\mathrm{D}_k\mathrm{D}_l = (-1)^{\tau(k)\tau(l)}\mathrm{D}_l\mathrm{D}_k$, 可推得

$$\left[\mathrm{D}_k, \mathrm{D}_{ij}(f)\right] = (-1)^{\tau(k)\tau(i)}\mathrm{D}_{ij}(\mathrm{D}_k(f)), \quad \forall k, i, j \in Y. \tag{1.2}$$

命题 1.3 S 是单李超代数.

证明 任取 $D = \mathrm{D}_{ij}(f) \in \mathrm{S}_k$, 其中 $k \in \mathbb{N}_0$, 则 $f \in \Lambda(m,n,\underline{t})_{k+2}$. 若 $[D, \mathrm{S}_{-1}] = 0$, 则 $[\mathrm{S}_{-1}, D] = 0$. 故 $\left[\mathrm{D}_l, \mathrm{D}_{ij}(f)\right] = 0$, $\forall l \in Y$. 由 (1.2) 式知, $\mathrm{D}_{ij}(\mathrm{D}_l(f)) = 0$, $\forall i \in Y$. 于是 $\mathrm{D}_l(f) \in \Lambda(m,n,\underline{t})_0$, $\forall l \in Y$. 由此得 $f \in \Lambda(m,n,\underline{t})_1 \cap \Lambda(m,n,\underline{t})_{k+2} = 0$, 随之, $D = 0$. 因此, S 是可迁的.

设 M 是 S_0- 模 S_{-1} 的非零子模. 设 $\sum_{i=1}^{s} a_i\mathrm{D}_i$ 是 M 中任一个非零元素, 其中 $a_i \in \mathbb{F}$. 可设 $a_j \neq 0$. 令 $i, r \in Y\backslash\{j\}$, 并且 $i \neq r$, 则 $x_j\mathrm{D}_i = (-1)^{\tau(r)\tau(i)}\mathrm{D}_{ri}(x_r x_j) \in \mathrm{S}_0$. 由于

$$\left[x_j\mathrm{D}_i, \sum_{i=1}^{s} a_i\mathrm{D}_i\right] = -(-1)^{\tau(j)(\tau(j)+\tau(i))}a_j\mathrm{D}_i \in M,$$

所以 $\mathrm{D}_i \in M$. 任取 $k \in Y\backslash\{i\}$, 则 $x_i\mathrm{D}_k \in \mathrm{S}_0$. 于是 $[x_i\mathrm{D}_k, \mathrm{D}_i] \in M$. 由此知 $\mathrm{D}_k \in M$, 从而 $M = \mathrm{S}_{-1}$. 故 S 是不可约的.

设 I 是 S 的任一个非零理想, 欲证 $I = \mathrm{S}$.

(a) 任取 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in A(m, \underline{t})$ 与 $u = \langle i_1, \cdots, i_t\rangle \in B(n)$, 并且 $(\alpha, u) \neq (\pi, E)$. 令 $\beta_i = \pi - \alpha_i$, $\forall i \in Y_0$. 设 $v = \langle j_1, \cdots, j_t\rangle \in B(n)$, 使得 $\{u\} \cup \{v\} = Y_1$, $\{u\} \cap \{v\} = \varnothing$. 利用 (1.2) 式可算得

$$\mathrm{D}_{ij}\left(x^{(\alpha)}x^u\right) = \lambda\left(\prod_{i=1}^{m}(\mathrm{ad}\mathrm{D}_i)^{\beta_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{t}\mathrm{ad}\mathrm{D}_{j_i}\right)\left(\mathrm{D}_{ij}\left(x^{(\pi)}x^E\right)\right).$$

由引理 1.1 知 $\mathrm{D}_{ij}\left(x^{(\alpha)}x^u\right) \in I$.

(b) 我们证明 $\mathrm{D}_{ij}\left(x^{(\pi)}x^E\right) \in I$, $\forall i, j \in Y$.

若 $i, j \in Y_1$, 则有

$$(1+\delta_{ij})\mathrm{D}_{ij}\left(x^{(\pi)}x^E\right) = \left[\mathrm{D}_{1i}\left(x^{(2\varepsilon_1)}x_i\right),\ \mathrm{D}_{ij}\left(x^{(\pi-\varepsilon_1)}x^E\right)\right].$$

由 (a) 知, 上式右端为 I 中元素, 所以 $\mathrm{D}_{ij}(x^{(\pi)}x^E) \in I$. 因为

$$\mathrm{D}_{ji}\left(x^{(\pi)}x^E\right) = -(-1)^{\tau(i)\tau(j)+n(\tau(i)+\tau(j))}\mathrm{D}_{ij}\left(x^{(\pi)}x^E\right),$$

所以 $\mathrm{D}_{ji}\left(x^{(\pi)}x^E\right) \in I$.

若 $i, j \in Y_0$, 取 $k \in Y_1$, 则

$$\mathrm{D}_{ij}\left(x^{(\pi)}x^E\right) = -\left[\mathrm{D}_{ji}\left(x^{(2\varepsilon_j)}x_k\right), \mathrm{D}_{kj}\left(x^{(\pi-\varepsilon_j)}x^E\right)\right] \in I.$$

相仿可证得, 当 $i \in Y_0, j \in Y_1$, 也有 $\mathrm{D}_{ij}\left(x^{(\pi)}x^E\right) \in I$.

综合 (a) 与 (b) 知, $I = \mathrm{S}$. 故 S 是单李超代数. □

下面考察李超代数 H. 利用第一章 (2.26) 式, 可得到 H 中的如下等式

$$[\mathrm{D}_j,\ \mathrm{D}_\mathrm{H}(f)] = \mathrm{D}_\mathrm{H}(\mathrm{D}_j(f)), \quad \forall j \in Y. \tag{1.3}$$

命题 1.4　H 是单李超代数.

证明　相仿于命题 1.3 中 S 的可迁性与不可约性的证明, 可以证得 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数 H 也是可迁的与不可约的. 设 I 是 H 的任一非零理想. 我们知道, $\mathrm{H} = \bigoplus_{i=-1}^{\xi-3}\mathrm{H}_i$.

(i) 若 $i < \xi - 3$, 任取 $\mathrm{D}_\mathrm{H}\left(x^{(\alpha)}x^u\right) \in \mathrm{H}_i$, 则存在 $j \in Y_0$ 使得 $\mathrm{D}\left(x^{(\alpha+\varepsilon_j)}x^u\right) \in \mathrm{H}$, 或者存在 $j \in Y_1$ 使得 $0 \neq \mathrm{D}_\mathrm{H}\left(x^{(\alpha)}x_jx^u\right) \in \mathrm{H}$. 对于前一情形, 由 (1.3) 式与引理 1.1 知

$$\mathrm{D}_\mathrm{H}\left(x^{(\alpha)}x^u\right) = \left[\mathrm{D}_j,\ \mathrm{D}_\mathrm{H}\left(x^{(\alpha+\varepsilon_j)}x^u\right)\right] \in I;$$

对于后一情形, 则有

$$\mathrm{D_H}\big(x^{(\alpha)}x^{u}\big)=\Big[\mathrm{D}_j,\ \mathrm{D_H}\big(x^{(\alpha)}x_jx^{u}\big)\Big]\in I.$$

于是可知, $\bigoplus_{i=-1}^{\xi-4}\mathrm{H}_i\subseteq I$.

(ii) 若 $u\in B(n)$, $i\in\{u\}$, 我们定义 $u-\langle i\rangle=w\in B(n)$, 使得 $\{w\}=\{u\}\backslash\{i\}$. 则

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_{\xi-3}&=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\big\{\mathrm{D_H}\big(x^{(\alpha)}x^{u}\big)\mid|\alpha|+|u|=\xi-1\big\}\\&=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\big\{\mathrm{D_H}\big(x^{(\pi-\varepsilon_j)}x^{E}\big),\ \mathrm{D_H}\big(x^{(\pi)}x^{E-\langle k\rangle}\big)\mid j\in Y_0,\ k\in Y_1\big\}.\end{aligned}$$

直接计算知

$$-\sigma(j)\mathrm{D_H}\big(x^{(\pi-\varepsilon_j)}x^{E}\big)=\Big[\mathrm{D_H}\big(x^{(\varepsilon_j+2\varepsilon_{j'})}\big),\ \mathrm{D_H}\big(x^{(\pi-\varepsilon_j-\varepsilon_{j'})}x^{E}\big)\Big].$$

因此, 由 (i) 知, $\mathrm{D_H}\big(x^{(\pi-\varepsilon_j)}x^{E}\big)\in I$, $\forall j\in Y_0$.

取 $l,j\in Y_0$, $l\neq j$. 则对任意 $k\in Y_1$, 有

$$\mathrm{D_H}\big(x^{(\pi)}x^{E-\langle k\rangle}\big)=\Big[\mathrm{D_H}(x_jx_lx_k),\ \mathrm{D_H}\big(x^{(\pi-\varepsilon_j-\varepsilon_l)}x^{E}\big)\Big].$$

由 (i) 知, $\mathrm{D_H}\big(x^{(\pi)}x^{E-\langle k\rangle}\big)\in I$. 于是 $\mathrm{H}_{\xi-3}\subseteq I$. 由 (i) 与 (ii) 知, $I=\mathrm{H}$. 所以 H 是单李超代数. □

命题 1.5 K 是单李超代数.

证明 设 I 是李超代数 K 的任一非零理想. 取 $f\in I$, $f\neq 0$. 可设

$$f=f_0x^{(k\varepsilon_m)}+f_1x^{(k\varepsilon_m-\varepsilon_m)}+\cdots+f_{k-1}x^{(\varepsilon_m)}+f_k,$$

其中 $f_0\neq 0$, 并且 $\mathrm{D}_m(f_i)=0$, $i=0,1,\cdots,k$.

由于 $2^kf_0=(\mathrm{ad}1)^k(f)\in I$, 故 $f_0\in I$. 任取 $j\in Y_0$, 则有

$$\mathrm{ad}x_{j'}(f_0)=(-1)^{\tau(j')\mathrm{d}(f)}\sigma(j')\mathrm{D}_j(f)\in I.$$

连续用 $\mathrm{ad}x_{j'}$ 作用于 f_0, 则可获得 $g_0\in I$, $g_0\neq 0$, 并且 $\mathrm{D}_m(g_0)=0$, $\mathrm{D}_j(g_0)=0$, $j\in Y_0$. 任取 $j\in Y_1$, 用 $\mathrm{ad}x_j$ 作用于 g_0, 则可得到 $h_0\in I$, $h_0\neq 0$, 并且 $\mathrm{D}_j(h_0)=0$, $j\in Y$. 由此可得 $1\in I$.

任取 $j\in Y$, 因为 $[1,x_mx_j]\in I$, 故 $2x_j\in I$, 于是 $x_j\in I$. 由 $[1,x^{(2\varepsilon_m)}]\in I$, 可得 $x_m\in I$. 任取 $x^{(\alpha)}x^{u}\in \mathrm{K}$, 若 $u\neq E$, 则可设 $j\in Y_1\backslash\{u\}$. 于是 $x_jx^u\neq 0$, 并且

$$\big[x_j,\ x^{(\alpha)}x_jx^{u}\big]=-x^{(\alpha)}x^{u}\in I,$$

从而 $x^{(\alpha)}x^{u}\in I$.

设 $u=E$. 若 $\alpha_m<\pi_m-1$, 则

$$2x^{(\alpha)}x^{E}=\big[1,\ x^{(\alpha+\varepsilon_m)}x^{E}\big]\in I.$$

因此 $x^{(\alpha)}x^{u} \in I$. 设 $\alpha_m = \pi_m - 1$, 如果有 $j \in Y_0$, 使得 $\alpha_j < \pi_j$, 则 $x^{(\alpha+\varepsilon_m)}x^E \in \mathrm{K}$, 于是

$$x^{(\alpha)}x^E = 2^{-1}\left[1,\ x^{(\alpha+\varepsilon_m)}x^E\right] \in I;$$

设 $\alpha_m = \pi_m - 1,\ \alpha_j = \pi_j,\ \forall j \in Y_0\backslash\{m\}$, 则 $x^{(\alpha)}x^E = x^{(\pi-\varepsilon_m)}x^E$.

若 $n - m - 3 \equiv 0\ (\mathrm{mod}p)$, 由于

$$\begin{aligned}
\left[x_m,\ x^{(\alpha)}x^E\right] &= \left[x_m,\ x^{(\pi-\varepsilon_m)}x^E\right] \\
&= 2x_m x^{(\pi-2\varepsilon_m)}x^E - \left(2x^{(\pi-\varepsilon_m)}x^E - \sum_{i\in Y\backslash\{m\}} x_i \mathrm{D}_i\left(x^{(\pi-\varepsilon_m)}x^E\right)\right) \\
&= (m-n-5)x^{(\pi-\varepsilon_m)}x^E \\
&= -2x^{(\pi-\varepsilon_m)}x^E,
\end{aligned}$$

知 $x^{(\pi-\varepsilon_m)}x^E \in I$, 因此 $I = \mathrm{K}$.

若 $n - m - 3 \not\equiv 0\ (\mathrm{mod}p)$, 则 $x^{(\pi)}x^E \in \mathrm{K}$. 于是 $x^{(\pi-\varepsilon_m)}x^E = 2^{-1}[1, x^{(\pi)}x^E] \in I$. 由

$$\left[x_m,\ x^{(\pi)}x^E\right] = (n-m-3)x^{(\pi)}x^E$$

可知, $x^{(\pi)}x^E \in I$, 因此也有 $I = \mathrm{K}$. 综上知 K 是单李超代数. □

§2　导子超代数的 $\mathbb{Z}$- 阶化

我们先回忆导子的定义. 设 L 是李超代数, $\mathrm{D} \in \mathrm{pl}_\theta(L)$, 其中 $\theta \in \mathbb{Z}_2$. 若对 $x \in \mathrm{hg}(L)$, $y \in L$, 则有

$$\mathrm{D}([x,y]) = [\mathrm{D}(x), y] + (-1)^{\theta \mathrm{d}(x)}[x, \mathrm{D}(y)],$$

那么, 我们称 D 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 次数为 θ 的导子. 令 $\mathrm{Der}_\theta(L)$ 表示 L 的所有的 $\mathbb{Z}_2$- 次数为 θ 的导子的集合, 则称李超代数

$$\mathrm{Der}\,(L) = \mathrm{Der}_{\overline{0}}(L) \oplus \mathrm{Der}_{\overline{1}}(L)$$

为 L 的导子超代数, 称 $\mathrm{Der}(L)$ 中的元素为 L 的超导子, 简称为 L 的导子.

本节仍用 W, S, H 与 K 分别表示李超代数 $\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$, $\mathrm{S}(m,n,\underline{t})$, $\mathrm{H}(m,n,\underline{t})$ 与 $\mathrm{K}(m,n,\underline{t})$, 并且设 $m,n > 1$. 本节将讨论 W, S 与 H 的导子超代数的 $\mathbb{Z}$- 阶化及其相关性质. 令 L 表示李超代数 W, S 或 H. 由 §1 知, $L = \bigoplus_{i=-1}^{\lambda} L_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数. 当 $L =$ W, S 与 H 时, λ 分别为 $\xi - 1$, $\xi - 2$ 与 $\xi - 3$. 设 $t \in \mathbb{Z}$, 令

$$\mathrm{Der}_t(L) := \{\phi \in \mathrm{Der}\,(L) | \phi(L_i) \subseteq L_{t+i}, \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

引理 2.1　$\mathrm{Der}\,(L) = \bigoplus_{t\in\mathbb{Z}} \mathrm{Der}_t(L)$. 从而, $\mathrm{Der}\,(L)$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数.

证明 易见 $[\mathrm{Der}_t(L), \mathrm{Der}_k(L)] \subseteq \mathrm{Der}_{t+k}(L)$, $t,k\in\mathbb{Z}$. 所以我们只证 $\mathrm{Der}(L)=\bigoplus_{t\in\mathbb{Z}}\mathrm{Der}_t(L)$. 显然 $\bigoplus_{t\in\mathbb{Z}}\mathrm{Der}_t(L)\subseteq\mathrm{Der}(L)$, 下面证明反包含关系成立.

设 $-1\le i\le\lambda$. 令 $\mathrm{pr}_i: L\to L$ 是投影映射, 使得对任意 $x=x_{-1}+x_0+\cdots+x_\lambda$, 其中 $x_j\in L_j$, 均有 $\mathrm{pr}_i(x)=x_i$. 显然, 恒等映射 $\mathrm{id}=\sum_{i=-1}^{\lambda}\mathrm{pr}_i$. 任取 $\phi\in\mathrm{Der}(L)$, 则有

$$\phi=\left(\sum_{i=-1}^{\lambda}\mathrm{pr}_i\right)\phi\left(\sum_{j=-1}^{\lambda}\mathrm{pr}_j\right)=\sum_{i,j=-1}^{\lambda}(\mathrm{pr}_i)\phi(\mathrm{pr}_j).$$

易见

$$(\mathrm{pr}_i)\phi(\mathrm{pr}_j)\in\mathrm{pl}_{i-j}(L):=\{\phi\in\mathrm{pl}(L)|\phi(L_k)\subseteq L_{i-j+k},\forall k\in\mathbb{Z}\},$$

所以 $\phi\in\bigoplus_{t\in\mathbb{Z}}\mathrm{pl}_t(L)$. 于是

$$\mathrm{Der}(L)\subsetneq\bigoplus_{t\in\mathbb{Z}}\mathrm{pl}_t(L). \tag{2.1}$$

任取 $\phi\in\mathrm{Der}(L)$. 由 (??) 式可设 $\phi=\sum_{t\in\mathbb{Z}}\phi_t$, 其中 $\phi_t\in\mathrm{pl}_t(L)$. 设 x, y 是 L 中的 $\mathbb{Z}$-齐次元素, 则有

$$\begin{aligned}&\sum_{t\in\mathbb{Z}}\phi_t([x,y])\\&=\left(\sum_{t\in\mathbb{Z}}\phi_t\right)([x,y])\\&=\phi([x,y])\\&=[\phi(x),y]+(-1)^{\mathrm{d}(\phi)\mathrm{d}(x)}[x,\phi(y)]\\&=\left[\sum_{t\in\mathbb{Z}}\phi_t(x),y\right]+(-1)^{\mathrm{d}(\phi)\mathrm{d}(x)}\left[x,\sum_{t\in\mathbb{Z}}\phi_t(y)\right]\\&=\sum_{t\in\mathbb{Z}}\left([\phi_t(x),y]+(-1)^{\mathrm{d}(\phi_t)\mathrm{d}(x)}[x,\phi_t(y)]\right).\end{aligned}$$

所以

$$\phi_t([x,y])=[\phi_t(x),y]+(-1)^{\mathrm{d}(\phi_t)\mathrm{d}(x)}[x,\phi_t(y)].$$

于是 $\phi_t\in\mathrm{Der}(L)\cap\mathrm{pl}_t(L)=\mathrm{Der}_t(L)$. 因此 $\phi\in\bigoplus_{t\in\mathbb{Z}}\mathrm{Der}_t(L)$. 这就证明了 $\mathrm{Der}(L)\subseteq\bigoplus_{t\in\mathbb{Z}}\mathrm{Der}_t(L)$. □

因为 L 是有限维的, 故 $\mathrm{Der}(L)$ 也是有限维的. 因此非零的 $\mathrm{Der}_t(L)$ 也只能是有限个. 故存在非负整数 r 与 q, 使得 $\mathrm{Der}(L)=\bigoplus_{t=-r}^{q}\mathrm{Der}_t(L)$.

由于 $\mathrm{Der}(L)$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化的李超代数, 所以欲确定 $\mathrm{Der}(L)$, 只需确定出每个 $\mathbb{Z}_2$- 阶化空间 $\mathrm{Der}_t(L)$.

引理 2.2 设 $x\in L_{\bar{o}}, y\in L$, $\phi\in\mathrm{hg}(\mathrm{Der}(L))$. 若 $r=p^t$, 使得 $(\mathrm{ad}\,x)^r=\mathrm{ad}\,y$, 则 $\phi(y)=(\mathrm{ad}\,x)^{r-1}\phi(x)$.

证明 任取 $z\in L$, 直接验证可知 $[\phi,\mathrm{ad}\,y](z)=\mathrm{ad}\,\phi(y)(z)$, 所以 $\mathrm{ad}\,\phi(y)=[\phi,\mathrm{ad}\,y]$. 因此有

$$\mathrm{ad}\,\phi(y)=[\phi,\mathrm{ad}\,y]=[\phi,(\mathrm{ad}\,x)^r]$$

$$
\begin{aligned}
&= [(\operatorname{ad} x)^r, \phi] \\
&= [\operatorname{ad} \underbrace{x, [\operatorname{ad} x, \cdots, [\operatorname{ad}}_{r\text{ 个}} x, \phi] \cdots]] \\
&= [\operatorname{ad} \underbrace{x, \cdots, [\operatorname{ad}}_{r-1\text{ 个}} x, \operatorname{ad} \phi(x)] \cdots] \\
&= \operatorname{ad} [x, \cdots, [x, \phi(x)] \cdots] \\
&= \operatorname{ad} \big((\operatorname{ad} x)^{r-1} \phi(x)\big).
\end{aligned}
$$

因为 L 是单李超代数, 所以 L 的中心是零. 因此 $\phi(y) = (\operatorname{ad} x)^{r-1}\phi(x)$. □

定义 2.3 设 $f \in \Lambda(m,n,\underline{t})$. 当 $i \in Y_0$ 时, 若 $\mathrm{D}_i^{\pi_i}(f) = 0$, 则称 f 是 x_i- 截头的; 当 $i \in Y_1$ 时, 若 $\mathrm{D}_i(f) = 0$, 则称 f 是 x_i- 截头的.

任取 $i \in Y$, 令 $\eta_i : \Lambda(m,n,\underline{t}) \to \Lambda(m,n,\underline{t})$ 是线性映射, 使得

$$
\eta_i(x^{(\alpha)}x^u) := \begin{cases} x^{(\alpha+\varepsilon_i)}x^u, & \text{若 } i \in Y_0, \\ x^{(\alpha)}x_i x^u, & \text{若 } i \in Y_1. \end{cases}
$$

当 $\alpha + \varepsilon_i \notin A(m,\underline{t})$ 时, 约定 $x^{(\alpha+\varepsilon_i)} = 0$. 以下引理是显然的.

引理 2.4 以下结论成立.

(i)若 $g \in \Lambda(m,n,\underline{t})$ 是 x_i- 截头的, 其中 $i \in Y$, 则 $\mathrm{D}_i\eta_i(g) = g$.

(ii)$\mathrm{D}_i\eta_j = (-1)^{\tau(i)\tau(j)}\eta_j\mathrm{D}_i$, 这里 $i \neq j$, $i,j \in Y$.

命题 2.5 设 $g_1, g_2, \cdots, g_k \in \Lambda(m,n,\underline{t})$. 如果 g_i 是 x_i- 截头的, $i = 1,\cdots,k$, 并且 $\mathrm{D}_i(g_j) = (-1)^{\tau(i)\tau(j)}\mathrm{D}_j(g_i)$, $1 \le i,j \le k$, 则存在 $g \in \Lambda(m,n,\underline{t})$, 使得 $\mathrm{D}_i(g) = g_i$, $i = 1,\cdots,k$.

证明 对 k 用归纳法证明命题成立. 若 $k = 1$, 令 $g = \eta_1(g_1)$, 由引理 2.4 的 (i) 知, $\mathrm{D}_1(g) = \mathrm{D}_1\eta_1(g_1) = g_1$, 故此时命题成立.

假设 $k \ge 2$, 并且对 $k-1$ 命题结论成立. 则存在 $f \in \Lambda(m,n,\underline{t})$, 使得 $\mathrm{D}_i(f) = g_i$, $i = 1,\cdots,k-1$. 令 $g := f + \eta_k\big(g_k - \mathrm{D}_k(f)\big)$. 由引理 2.4 的 (ii), 有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}_i(g) &= g_i + \mathrm{D}_i\eta_k\big(g_k - \mathrm{D}_k(f)\big) \\
&= g_i + (-1)^{\tau(k)\tau(i)}\eta_k\big(\mathrm{D}_i(g_k) - \mathrm{D}_i\mathrm{D}_k(f)\big) \\
&= g_i + (-1)^{\tau(k)\tau(i)}\eta_k\big((-1)^{\tau(i)\tau(k)}\mathrm{D}_k(g_i) - (-1)^{\tau(i)\tau(k)}\mathrm{D}_k\mathrm{D}_i(f)\big) \\
&= g_i,
\end{aligned}
$$

其中 $i = 1,\cdots,k-1$. 因为 $g_k - \mathrm{D}_k(f)$ 是 x_k- 截头的, 由引理 2.4 的 (i) 知

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}_k(g) =& \mathrm{D}_k\Big(f + \eta_k\big(g_k - \mathrm{D}_k(f)\big)\Big) \\
=& \mathrm{D}_k(f) + \mathrm{D}_k\eta_k\big(g_k - \mathrm{D}_k(f)\big)
\end{aligned}
$$

$$=\mathrm{D}_k(f) + g_k - \mathrm{D}_k(f) = g_k.$$

归纳法完成. □

为证下一个命题, 我们需要用到 W_{-1} 在 W 中的中心化子 $\mathrm{C_W}(\mathrm{W}_{-1}) := \{x \in \mathrm{W} \mid [x, \mathrm{W}_{-1}] = 0\}$. 我们断言 $\mathrm{C_W}(\mathrm{W}_{-1}) = \mathrm{W}_{-1}$. 事实上, $\mathrm{W}_{-1} \subseteq \mathrm{C_W}(\mathrm{W}_{-1})$ 是显然的. 反之, 任取 $y \in \mathrm{C_W}(\mathrm{W}_{-1})$, 设 $y = \sum_{i=1}^{s} f_i \mathrm{D}_i$. 由 $[y, \mathrm{W}_{-1}] = [\mathrm{W}_{-1}, y]$, 可得 $[\mathrm{D}_k, \sum_{i=1}^{s} f_i \mathrm{D}_i] = 0$, $\forall k \in Y$. 所以 $\mathrm{D}_k(f_i) = 0$, $\forall k, i \in Y$, 故 $f_i \in \mathbb{F}$, $\forall i \in Y$, 因此 $y \in \mathrm{W}_{-1}$. 于是, $\mathrm{C_W}(\mathrm{W}_{-1}) \subseteq \mathrm{W}_{-1}$, 我们的断言成立.

命题 2.6 *设* $\phi \in \mathrm{Der}_t(L)$, $t \geq 0$, *则存在* $y \in \mathrm{Nor_W}(L) := \{x \in \mathrm{W} \mid [x, L] \subseteq L\}$, *使得* $\phi = \mathrm{ad}\, y\big|_L$.

证明 分以下几步证明本命题.

1) 设 $\phi(\mathrm{D}_k) = \sum_{i=1}^{s} f_{ik} \mathrm{D}_i$, $\forall k \in Y$. 因为 $\phi([\mathrm{D}_k, \mathrm{D}_l]) = 0$, 所以

$$[\phi(\mathrm{D}_k), \mathrm{D}_l] + (-1)^{\mathrm{d}(\phi)\tau(k)} [\mathrm{D}_k, \phi(\mathrm{D}_l)] = 0.$$

因此

$$\left[\sum_{i=1}^{s} f_{ik} \mathrm{D}_i, \mathrm{D}_l\right] + (-1)^{\mathrm{d}(\phi)\tau(k)} \left[\mathrm{D}_k, \sum_{i=1}^{s} f_{il} \mathrm{D}_i\right] = 0.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{s} \left((-1)^{\mathrm{d}(\phi)\tau(k)} \mathrm{D}_k(f_{il}) - (-1)^{\left(\mathrm{d}(f_{ik}) + \tau(i)\right)\tau(l)} \mathrm{D}_l(f_{ik}) \right) \mathrm{D}_i = 0.$$

易见

$$\mathrm{d}(\phi) + \tau(k) = \mathrm{d}(f_{ik}) + \tau(i). \tag{2.2}$$

所以

$$(-1)^{\mathrm{d}(\phi)\tau(k)} \mathrm{D}_k(f_{il}) - (-1)^{(\mathrm{d}(\phi) + \tau(k))\tau(l)} \mathrm{D}_l(f_{ik}) = 0.$$

于是

$$\mathrm{D}_k\big((-1)^{\mathrm{d}(\phi)\tau(l)} f_{il}\big) = (-1)^{\tau(k)\tau(l)} \mathrm{D}_l\big((-1)^{\mathrm{d}(\phi)\tau(k)} f_{ik}\big). \tag{2.3}$$

设 $k \in Y_0$, 则 $(\mathrm{ad}\, \mathrm{D}_k)^{\pi_k + 1} = 0$. 由引理 2.2 知, $(\mathrm{ad}\, \mathrm{D}_k)^{\pi_k}(\phi(\mathrm{D}_k)) = 0$, 所以 $(\mathrm{ad}\, \mathrm{D}_k)^{\pi_k} (\sum_{i=1}^{s} f_{ik} \mathrm{D}_i) = 0$. 从而 $\sum_{i=1}^{s} \mathrm{D}_k^{\pi_k}(f_{ik}) \mathrm{D}_i = 0$. 故 $\mathrm{D}_k^{\pi_k}(f_{ik}) = 0$, $\forall i \in Y$, 即 f_{ik} 是 x_k- 截头的, $\forall k \in Y_0$. 设 $k \in Y_1$, 用 k 代替 (2.3) 式中的 l, 可推得 $\mathrm{D}_k(f_{ik}) = 0$, $\forall i \in Y$. 于是 f_{ik} 是 x_k- 截头的, $\forall k \in Y_1$. 由命题 2.5 知, 存在 $g_i \in \Lambda(m, n, \underline{t})$, 使得

$$\mathrm{D}_k(g_i) = (-1)^{\mathrm{d}(\phi)\tau(k)} f_{ik}, \quad \forall i, k \in Y. \tag{2.4}$$

2) 由 (2.4) 式知, $\mathrm{d}(g_i) + \tau(k) = \mathrm{d}(f_{ik})$. 再由 (2.2) 式知 $\mathrm{d}(\phi) = \mathrm{d}(g_i) + \tau(i)$, $\forall i \in Y$. 令 $z = -\sum_{i=1}^{s} g_i \mathrm{D}_i$. 由 (2.4) 式知

$$[z, \mathrm{D}_k] = -\left[\sum_{i=1}^{s} g_i \mathrm{D}_i, \mathrm{D}_k\right] = \sum_{i=1}^{s} (-1)^{\left(\mathrm{d}(g_i) + \tau(i)\right)\tau(k)} \mathrm{D}_k(g_i) \mathrm{D}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{s}(-1)^{\mathrm{d}(\phi)\tau(k)}\mathrm{D}_k(g_i)\mathrm{D}_i = \sum_{i=1}^{s} f_{ik}\mathrm{D}_i = \phi(\mathrm{D}_k), \quad \forall k \in Y.$$

因为 $z \in \mathrm{W} = \bigoplus_{i=-1}^{\xi}\mathrm{W}_i$, 故可设 $z = \sum_{i=-1}^{\xi} z_i$, 其中 $z_i \in \mathrm{W}_i$. 因为 $\mathrm{zd}(\phi(\mathrm{D}_k)) = \mathrm{zd}(\phi) + \mathrm{zd}(\mathrm{D}_k) = t-1$ (见第一章定义 1.15), 所以 $\phi(\mathrm{D}_k) \in L_{t-1} \subseteq \mathrm{W}_{t-1}$. 由于

$$\phi(\mathrm{D}_k) = [z, \mathrm{D}_k] = \sum_{i=-1}^{\xi}[z_i, \mathrm{D}_k], \quad \forall k \in Y,$$

所以 $\phi(\mathrm{D}_k) = [z_t, \mathrm{D}_k]$, $\forall k \in Y$. 令 $y = z_t$, 则 $\phi(\mathrm{D}_k) = \mathrm{ad}\, y(\mathrm{D}_k)$, $\forall k \in Y$. 令 $\psi = \phi - \mathrm{ad}\, y$, 则 $\psi(L_{-1}) = 0$. 显然 $\psi(L_j) \subseteq \mathrm{W}_{t+j}$, 其中 $j \geq -1$.

3) 下面对 j 用归纳法证明 $\psi(L_j) = 0$, $j \geq -1$.

由 2) 知 $\psi(L_{-1}) = 0$. 设 $j \geq 0$. 显然 $[L_{-1}, L_j] \subseteq L_{j-1}$. 由归纳假设知, $\psi([L_{-1}, L_j]) = \psi(L_{j-1}) = 0$. 于是 $[L_{-1}, \psi(L_j)] = 0$, 即 $[\mathrm{W}_{-1}, \psi(L_j)] = 0$. 从而有 $\psi(L_j) \subseteq \mathrm{C_W}(\mathrm{W}_{-1})$. 因为 $\mathrm{C_W}(\mathrm{W}_{-1}) = \mathrm{W}_{-1}$, 所以 $\psi(L_j) \subseteq \mathrm{W}_{-1}$. 故 $\psi(L_j) \subseteq \mathrm{W}_{-1} \cap \mathrm{W}_{t+j}$. 由 $t+j \geq 0$ 知 $\psi(L_j) = 0$. 归纳法完成.

由 3) 知 $\psi(L) = 0$. 随之有 $(\phi - \mathrm{ad}\, y)(L) = 0$. 所以 $\phi = \mathrm{ad}\, y\big|_L$. □

引理 2.7 令 $\phi \in \mathrm{Der}\,(L), y \in L$. 设 $[y, \mathrm{D}_i] = y_i$, $\forall i \in Y$. 如果 $\phi(\mathrm{D}_i) = \phi(y_i) = 0$, $\forall i \in Y$, 则 $\phi(y) \in L_{-1}$.

证明 设 $\phi(y) = \sum_{k=1}^{s} f_k\mathrm{D}_k$, 其中 $f_k \in \Lambda(m,n,\underline{t})$. 由已知, $\phi([y,\mathrm{D}_i]) = \phi(y_i) = 0$, 所以

$$[\phi(y), \mathrm{D}_i] + (-1)^{\mathrm{d}(\phi)\mathrm{d}(y)}[y, \phi(\mathrm{D}_i)] = 0.$$

由于 $\phi(\mathrm{D}_i) = 0$, 故 $[\phi(y), \mathrm{D}_i] = 0$. 于是 $[\sum_{k=1}^{s} f_k\mathrm{D}_k, \mathrm{D}_i] = 0$. 由此可得 $\mathrm{D}_i(f_k) = 0$, $\forall i \in Y$. 故 $f_k \in \mathbb{F}$, $\forall k \in Y$; 因此 $\phi(y) \in L_{-1}$. □

引理 2.8 令 $\phi \in \mathrm{Der}_t(L)$, 其中 $t \in \mathbb{Z}$. 设 $\phi(L_j) = 0$, 其中 $j = -1, 0, \cdots, k$, $k \geq -1$. 若 $k + t \geq -1$, 则 $\phi = 0$.

证明 设 $j \geq k$. 对 j 用归纳法证明 $\phi(L_j) = 0$. 由已知 $\phi(L_k) = 0$. 令 $j > k$. 任取 $y \in L_j$. 设 $[y, \mathrm{D}_i] = y_i, \forall i \in Y$, 则 $y_i \in L_{j-1}$. 由归纳假设 $\phi(y_i) = 0, \forall i \in Y$. 由于 $\phi(\mathrm{D}_i) = 0, \forall i \in Y$, 由引理 2.7 可推得 $\phi(y) \in L_{-1}$. 因为 $j + t > k + t \geq -1$, 所以 $\phi(y) \in L_{-1} \cap L_{j+t} = 0$, 从而 $\phi(L_j) = 0$. 归纳法完成. 由于 $\phi(L_j) = 0, j \geq -1$, 所以 $\phi(L) = 0$. 这就证明了 $\phi = 0$. □

我们知道 $\mathrm{Der}\,(L) = \mathrm{Der}_{\bar{0}}(L) \oplus \mathrm{Der}_{\bar{1}}(L)$, 这里 $L = \mathrm{W}, \mathrm{S}$ 或 H. 若 $i \in Y_0$, 则 $\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_i \in \mathrm{Der}_{\bar{0}}(L)$. 所以

$$(\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_i)([x,y]) = [(\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_i)(x), y] + [x, (\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_i)(y)],$$

其中 $x, y \in L$. 设 k 是正整数, 由 Leibniz 公式, 有

$$(\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_i)^k([x,y]) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left[(\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_i)^{k-j}(x), (\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_i)^j(y)\right] \tag{2.5}$$

若 $k=p^r$, 由 (2.5) 式知

$$(\operatorname{ad} \mathrm{D}_i)^{p^r}([x,y]) = [(\operatorname{ad} \mathrm{D}_i)^{p^r}(x), y] + [x, (\operatorname{ad} \mathrm{D}_i)^{p^r}(y)],$$

所以 $(\operatorname{ad} \mathrm{D}_i)^{p^r} \in \operatorname{Der}_{\overline{0}}(L)$.

如果 $r \geq t_i$, 任取 $\Lambda(m,n,\underline{t})$ 的元素 $x^{(\alpha)}x^u$, 则有

$$(\operatorname{ad} \mathrm{D}_i)^{p^r}(x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j) = (\mathrm{D}_i^{p^r}(x^{(\alpha)}x^u))\mathrm{D}_j = 0, \quad \forall j \in Y.$$

因此 $(\operatorname{ad} \mathrm{D}_i)^{p^r} = 0$. 于是有以下命题.

命题 2.9 设 $i \in Y_0$, r 是任意的正整数. 则 $(\operatorname{ad} \mathrm{D}_i)^{p^r} \in \operatorname{Der}_{\overline{0}}(L)$; 若 $r \geq t_i$, 则 $(\operatorname{ad} \mathrm{D}_i)^{p^r} = 0$.

§3 W 与 S 的导子超代数 [79]

在本节中, 我们将确定 W 与 S 的导子超代数. 首先讨论李超代数 W 的导子超代数. 由命题 2.6 我们立即可得以下命题.

命题 3.1 若 $t \geq 0$, 则 $\operatorname{Der}_t(\mathrm{W}) = \operatorname{ad} \mathrm{W}_t$.

命题 3.2 $\operatorname{Der}_{-1}(\mathrm{W}) = \operatorname{ad} \mathrm{W}_{-1}$.

证明 设 $\phi \in \operatorname{Der}_{-1}(\mathrm{W})$, 则 $\phi(\mathrm{W}_0) \subseteq \mathrm{W}_{-1}$. 故可设 $\phi(x_i\mathrm{D}_j) = \sum_{r=1}^s a_r\mathrm{D}_r$, 其中 $a_r \in \mathbb{F}$. 设 $k,l \in Y\backslash\{i,j\}$, 并且 $\phi(x_k\mathrm{D}_l) = \sum_{t=1}^s b_t\mathrm{D}_t$. 将 ϕ 作用于等式 $[x_i\mathrm{D}_j, x_k\mathrm{D}_l] = 0$, 可得 $a_k = 0$. 故 $\phi(x_i\mathrm{D}_j) = a_i\mathrm{D}_i + a_j\mathrm{D}_j$. 同理可知 $\phi(x_i\mathrm{D}_k) = d_i\mathrm{D}_i + d_k\mathrm{D}_k$, $\phi(x_k\mathrm{D}_j) = h_k\mathrm{D}_k + h_j\mathrm{D}_j$, 其中 $d_i, d_k, h_k, h_j \in \mathbb{F}$. 将 ϕ 作用于等式 $[x_i\mathrm{D}_k, x_k\mathrm{D}_j] = x_i\mathrm{D}_j$, $i \neq j$, 可得 $a_i = 0$. 故 $\phi(x_i\mathrm{D}_j) = a_j\mathrm{D}_j, a_j \in \mathbb{F}$. 特别地, 可设 $\phi(x_i\mathrm{D}_{i+1}) = c_i\mathrm{D}_{i+1}, i = 1,2,\cdots,s-1$, $c_i \in \mathbb{F}$, $\phi(x_s\mathrm{D}_1) = c_s\mathrm{D}_1$. 令 $\psi = \phi - \sum_{i=1}^s c_i \operatorname{ad} \mathrm{D}_i$, 则

$$\psi(x_i\mathrm{D}_{i+1}) = \psi(x_s\mathrm{D}_1) = 0, \quad i = 1,2,\cdots,s-1.$$

设 $\psi(x_i\mathrm{D}_i) = \sum_{l=1}^s r_l\mathrm{D}_l$, 将 ψ 作用于等式 $[x_i\mathrm{D}_i, x_i\mathrm{D}_j] = x_i\mathrm{D}_j$, 其中 $i \neq j$, 可得 $r_l = 0$, $\forall l \in Y$. 故 $\psi(x_i\mathrm{D}_i) = 0, \forall i \in Y$. 因为 W_0 是由 $\{x_i\mathrm{D}_{i+1}, x_s\mathrm{D}_1 \mid i = 1,2,\cdots,s-1\} \cup \{x_i\mathrm{D}_i \mid i \in Y\}$ 生成的, 所以 $\psi(\mathrm{W}_0) = 0$. 由引理 2.8 知 $\psi = 0$, 故 $\phi \in \operatorname{ad} \mathrm{W}_{-1}$. □

命题 3.3 设 $T = \{x^{(k\varepsilon_i)}\mathrm{D}_j \mid 0 \leq k \leq \pi_i,\ i \in Y_0,\ j \in Y\}$, $M = \{x_i\mathrm{D}_j \mid i \in Y_1,\ j \in Y\}$. 则 $T \cup M$ 生成 W.

证明 设 $T \cup M$ 生成的 W 的子代数为 Q.

1) 我们证明 $x^{(\pi)}\mathrm{D}_1 \in Q$. 为此, 对 t 用归纳法证明 $x^{(\pi_1\varepsilon_1+\cdots+\pi_t\varepsilon_t)}\mathrm{D}_1 \in Q$. 当 $t=1$ 时, $x^{(\pi_1\varepsilon_1)}\mathrm{D}_1 \in T \subseteq Q$. 设 $t > 1$. 假设 $x^{(\pi_1\varepsilon_1+\cdots+\pi_{t-1}\varepsilon_{t-1})}\mathrm{D}_1 \in Q$. 因为

$$x^{(\pi_t\varepsilon_t)}x_1\mathrm{D}_1 = [x^{(\pi_t\varepsilon_t)}\mathrm{D}_1, x^{(2\varepsilon_1)}\mathrm{D}_1] \in Q,$$

所以

$$x^{(\pi_1\varepsilon_1+\cdots+\pi_t\varepsilon_t)}\mathrm{D}_1 = 2^{-1}[x^{(\pi_1\varepsilon_1+\cdots+\pi_{t-1}\varepsilon_{t-1})}\mathrm{D}_1, x^{(\pi_t\varepsilon_t)}x_1\mathrm{D}_1] \in Q.$$

这就完成了归纳法, 于是可得 $x^{(\pi)}\mathrm{D}_1 \in Q$.

2) 欲证 $x^E\mathrm{D}_1 \in Q$. 为此, 对 k 用归纳法证明 $x_{m+1}\cdots x_{m+k}\mathrm{D}_1 \in Q$. 当 $k=1$ 时, $x_{m+1}\mathrm{D}_1 \in M \subseteq Q$. 设 $k>1$. 假设 $x_{m+1}\cdots x_{m+k-1}\mathrm{D}_1 \in Q$. 因为

$$x_1x_{m+k}\mathrm{D}_1 = [x_{m+k}\mathrm{D}_1, x^{(2\varepsilon_1)}\mathrm{D}_1] \in Q,$$

所以

$$x_{m+1}\cdots x_{m+k}\mathrm{D}_1 = [x_{m+1}\cdots x_{m+k-1}\mathrm{D}_1, x_1x_{m+k}\mathrm{D}_1] \in Q.$$

归纳法完成, 于是可知 $x^E\mathrm{D}_1 \in Q$.

3) 我们证明 $x^{(\pi)}x^E\mathrm{D}_j \in Q$, $\forall j \in Y$. 对任意 $j \in Y_0$, 由 2) 知, $x_1x^E\mathrm{D}_j = [x^E\mathrm{D}_1, x^{(2\varepsilon_1)}\mathrm{D}_j] \in Q$. 若 $j \in Y_0\backslash\{1\}$, 由 1) 知, $x^{(\pi)}x^E\mathrm{D}_j = [x^{(\pi)}\mathrm{D}_1, x_1x^E\mathrm{D}_j] \in Q$. 显然 $x^{(\pi)}x^E\mathrm{D}_1 = 2^{-1}[x^{(\pi)}\mathrm{D}_1, x_1x^E\mathrm{D}_1] \in Q$. 任取 $j \in Y_1$, 则有

$$x^{(\pi)}x^E\mathrm{D}_j = [x^{(\pi)}x^E\mathrm{D}_1, x_1\mathrm{D}_j] \in Q.$$

4) 对 $t = (|\pi|+|E|)-(|\alpha|+|u|)$ 用归纳法证明 $x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j \in Q$, 其中 $j \in Y$.

若 $t=0$, 由 3) 知 $x^{(\pi)}x^E\mathrm{D}_j \in Q$. 设 $t \geq 1$. 若 $|\alpha| < |\pi|$, 则存在 $k \in Y_0$, 使得 $x^{(\alpha+\varepsilon_k)}x^u \in \Lambda(m,n,\underline{t})$. 由归纳假设知 $x^{(\alpha+\varepsilon_k)}x^u\mathrm{D}_j \in Q$. 从而

$$x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j = [\mathrm{D}_k, x^{(\alpha+\varepsilon_k)}x^u\mathrm{D}_j] \in Q.$$

若 $|\alpha| = |\pi|$, 则 $|u| < |E|$. 故存在 $k \in Y_1$, 使得 $x_kx^u \neq 0$. 由归纳假设知 $x^{(\alpha)}x_kx^u\mathrm{D}_j \in Q$, 所以

$$x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j = [\mathrm{D}_k, x^{(\alpha)}x_kx^u\mathrm{D}_j] \in Q.$$

归纳法完成. 由 4) 知 $Q = \mathrm{W}$, 即 $T \cup M$ 生成 W. □

引理 3.4 设 $\phi \in \mathrm{Der}_{-t}(\mathrm{W}), t>1$. 若 $\phi(x^{(t\varepsilon_i)}\mathrm{D}_j) = 0, \forall i \in Y_0,\ j \in Y$, 则 $\phi = 0$.

证明 若 $k \leq t-1$, 则 $-t+(k-1) \leq -2$. 于是 $\phi(x^{(k\varepsilon_i)}\mathrm{D}_j) \in \mathrm{W}_{-t+(k-1)} = 0$. 由已知, $\phi(x^{(t\varepsilon_i)}\mathrm{D}_j) = 0$. 设 $k > t$. 对 k 用归纳法证明 $\phi(x^{(k\varepsilon_i)}\mathrm{D}_j) = 0$. 由归纳假设 $\phi(x^{((k-1)\varepsilon_i)}\mathrm{D}_j) = 0$. 显然 $\phi(\mathrm{D}_l) = 0, \forall l \in Y$. 因为

$$[x^{(k\varepsilon_i)}\mathrm{D}_j, \mathrm{D}_l] = -\delta_{li}(-1)^{\tau(j)\tau(l)}x^{((k-1)\varepsilon_i)}\mathrm{D}_j,$$

所以, 由引理 2.7 知 $\phi(x^{(k\varepsilon_i)}\mathrm{D}_j) \in \mathrm{W}_{-1}$. 因 $k>t$, 故 $-t+(k-1) > -1$. 于是 $\phi(x^{(k\varepsilon_i)}\mathrm{D}_j) \in \mathrm{W}_{-1} \cap \mathrm{W}_{-t+(k-1)} = 0, \forall i \in Y_0,\ j \in Y$. 显然 $\phi(x_i\mathrm{D}_j) \in \mathrm{W}_{-t} = 0, \forall i,j \in Y$. 由命题 3.3 知 $\phi(\mathrm{W}) = 0$, 从而 $\phi = 0$. □

命题 3.5 设 $t>1$. *若不存在正整数* k, *使得* $t = p^k$, *则* $\mathrm{Der}_{-t}(\mathrm{W}) = 0$.

证明 设 $\phi \in \mathrm{Der}_{-t}(\mathrm{W})$, 欲证 $\phi = 0$. 我们分以下两种情形讨论.

(i) $t \not\equiv 0 \pmod p$. 易见 $\phi(x^{(t\varepsilon_i)}\mathrm{D}_j) \in \mathrm{W}_{-1}$, 故可设 $\phi(x^{(t\varepsilon_i)}\mathrm{D}_j) = \sum_{l=1}^{s} a_l\mathrm{D}_l$, 其中 $a_l \in \mathbb{F}$. 显然 $\phi(\mathrm{W}_0) \subseteq \mathrm{W}_{-t} = 0$. 任取 $k \in Y\backslash\{j\}$. 将 ϕ 作用于等式 $[x^{(t\varepsilon_i)}\mathrm{D}_j, x_k\mathrm{D}_{m+1}] = 0$, 可知 $a_k = 0$. 于是 $\phi(x^{(t\varepsilon_i)}\mathrm{D}_j) = a_j\mathrm{D}_j$, $a_j \in \mathbb{F}$.

若 $i \neq j$, 将 ϕ 作用于等式 $[x^{(t\varepsilon_i)}\mathrm{D}_j, x_i\mathrm{D}_i] = -tx^{(t\varepsilon_i)}\mathrm{D}_j$, 可得 $-ta_j\mathrm{D}_j = 0$. 故 $a_j = 0$, 从而 $\phi(x^{(t\varepsilon_i)}\mathrm{D}_j) = 0$.

若 $i = j$, 将 ϕ 作用于等式 $[x^{(t\varepsilon_j)}\mathrm{D}_j, x_j\mathrm{D}_j] = (1+t)x^{(t\varepsilon_j)}\mathrm{D}_j$, 可得 $ta_j\mathrm{D}_j = 0$. 故 $a_j = 0$, 从而 $\phi(x^{(t\varepsilon_j)}\mathrm{D}_j) = 0$. 由引理 3.4 知 $\phi = 0$.

(ii) $t \equiv 0 \pmod p$. 将 t 写成 p-adic 数的形式 $t = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i p^i$, 其中 $\alpha_r \neq 0$. 因为 t 不是 p 的正整数幂, 所以, 若 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{r-1} = 0$, 则 $\alpha_r > 1$. 从而可知

$$\binom{t}{p^r} \not\equiv 0 \pmod p, \qquad \binom{t}{p^r - 1} \equiv 0 \pmod p.$$

考察 $\mathbb{Z}$- 次数知 $\phi(x^{((t-p^r)\varepsilon_i)}\mathrm{D}_i) = \phi(x^{((p^r+1)\varepsilon_i)}\mathrm{D}_j) = 0$. 当 $i \neq j$ 时, 将 ϕ 作用于等式

$$\left[x^{((t-p^r)\varepsilon_i)}\mathrm{D}_i, x^{((p^r+1)\varepsilon_i)}\mathrm{D}_j\right] = \binom{t}{p^r} x^{(t\varepsilon_i)}\mathrm{D}_j,$$

可知 $\phi(x^{(t\varepsilon_i)}\mathrm{D}_j) = 0$. 当 $i = j$ 时, 同理将 ϕ 作用于等式

$$\begin{aligned}\left[x^{((t-p^r+1)\varepsilon_j)}\mathrm{D}_j, x^{(p^r\varepsilon_j)}\mathrm{D}_j\right] &= \left[\binom{t}{p^r-1} - \binom{t}{p^r}\right] x^{(t\varepsilon_j)}\mathrm{D}_j \\ &= -\binom{t}{p^r} x^{(t\varepsilon_j)}\mathrm{D}_j,\end{aligned}$$

可知 $\phi(x^{(t\varepsilon_j)}\mathrm{D}_j) = 0$. 由引理 3.4 知 $\phi = 0$. □

命题 3.6 设 $t = p^r$, 其中 $r > 0$. 则

$$\mathrm{Der}_{-t}(\mathrm{W}) = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{(\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_i)^t \mid i \in Y_0\}.$$

证明 设 $\phi \in \mathrm{Der}_{-t}(\mathrm{W})$. 由于 $\mathrm{zd}(\phi(x^{(t\varepsilon_i)}\mathrm{D}_i)) = (-t)+(t-1) = -1$, 故可设 $\phi(x^{(t\varepsilon_i)}\mathrm{D}_i) = \sum_{l=1}^{s} a_{il}\mathrm{D}_l$, 其中 $i \in Y_0$, $a_{il} \in \mathbb{F}$. 令 $j \in Y\backslash\{i\}$. 将 ϕ 作用于等式 $[x^{(t\varepsilon_i)}\mathrm{D}_i, x_j\mathrm{D}_j] = 0$, 可得 $a_{ij} = 0$. 于是有 $\phi(x^{(t\varepsilon_i)}\mathrm{D}_i) = a_{ii}\mathrm{D}_i$, $\forall i \in Y_0$. 令 $\psi = \phi - \sum_{i=1}^{m} a_{ii}(\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_i)^t$, 则 $\psi(x^{(t\varepsilon_i)}\mathrm{D}_i) = 0$, $\forall i \in Y_0$. 利用等式 $x^{(t\varepsilon_i)}\mathrm{D}_j = [x^{(t\varepsilon_i)}\mathrm{D}_i, x_i\mathrm{D}_j]$, 可得 $\psi(x^{(t\varepsilon_i)}\mathrm{D}_j) = 0$, 其中 $j \in Y\backslash\{i\}$. 由引理 3.4 知 $\psi = 0$, 于是 $\phi = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}(\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_i)^t \in \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{(\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_i)^t \mid i \in Y_0\}$. □

由命题 3.1, 3.2, 3.5, 3.6 与命题 2.9 可得以下定理.

定理 3.7 $\mathrm{Der}(\mathrm{W}) = \mathrm{ad}\,\mathrm{W} \oplus \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{(\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_i)^{p^{k_i}} \mid i \in Y_0, 1 \leq k_i < t_i\}$.

下面讨论 S 的导子超代数. 首先定义线性映射 $\mathrm{div}: \mathrm{W} \to \Lambda(m,n,\underline{t})$, 使得 $\mathrm{div}(f\mathrm{D}_i) := (-1)^{\mathrm{d}(f)\tau(i)}\mathrm{D}_i(f)$, $\forall f \in \mathrm{hg}(\Lambda(m,n,\underline{t}))$, $\forall i \in Y$. 我们称 div 为发散映射.

引理 3.8 设 $D \in \mathrm{W}_\theta, H \in \mathrm{W}_\mu$, 其中 $\theta, \mu \in \mathbb{Z}_2$. 则

$$\mathrm{div}([D,H]) = D(\mathrm{div}H) - (-1)^{\theta\mu}H(\mathrm{div}D). \tag{3.1}$$

证明 因为 div 是线性映射, 所以不妨设 $D = f\mathrm{D}_i, H = g\mathrm{D}_j$. 于是 $\mathrm{d}(f) = \theta + \tau(i)$, $\mathrm{d}(g) = \mu + \tau(j)$. 直接计算, 则有

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{div}([f\mathrm{D}_i, g\mathrm{D}_j])\\
&\quad = \operatorname{div}\big(f\mathrm{D}_i(g)\mathrm{D}_j - (-1)^{\theta\mu} g\mathrm{D}_j(f)\mathrm{D}_i\big)\\
&\quad = (-1)^{\tau(j)(\theta+\mu+\tau(j))}\mathrm{D}_j(f\mathrm{D}_i(g)) - (-1)^{\theta\mu+\tau(i)(\mu+\theta+\tau(i))}\mathrm{D}_i(g\mathrm{D}_j(f))\\
&\quad = (-1)^{\tau(j)\theta+\tau(j)\mu+\tau(j)}\mathrm{D}_j(f)\mathrm{D}_i(g) + (-1)^{\tau(j)\mu+\tau(j)+\tau(j)\tau(i)} f\mathrm{D}_j\mathrm{D}_i(g)\\
&\qquad -(-1)^{\theta\mu+\tau(i)(\mu+\theta+\tau(i))}\mathrm{D}_i(g)\mathrm{D}_j(f)\\
&\qquad -(-1)^{\theta\mu+\tau(i)\theta+\tau(i)+\tau(i)\tau(j)} g\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j(f)\\
&\quad = (-1)^{\tau(j)\theta+\tau(j)\mu+\tau(j)}\mathrm{D}_j(f)\mathrm{D}_i(g) + (-1)^{\tau(j)\mu+\tau(j)} f\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j(g)\\
&\qquad -(-1)^{\mu\tau(j)+\tau(j)+\tau(j)\theta}\mathrm{D}_j(f)\mathrm{D}_i(g) - (-1)^{\theta\mu+\tau(i)\theta+\tau(i)} g\mathrm{D}_j\mathrm{D}_i(f)\\
&\quad = f\mathrm{D}_i((-1)^{\tau(j)\mu+\tau(j)}\mathrm{D}_j(g)) - (-1)^{\theta\mu} g\mathrm{D}_j((-1)^{\tau(i)\theta+\tau(i)}\mathrm{D}_i(f))\\
&\quad = f\mathrm{D}_i(\operatorname{div}(g\mathrm{D}_j)) - (-1)^{\theta\mu} g\mathrm{D}_j(\operatorname{div}(f\mathrm{D}_i))\\
&\quad = D(\operatorname{div}H) - (-1)^{\theta\mu} H(\operatorname{div}D). \qquad \square
\end{aligned}
$$

令 $\overline{\mathrm{S}} = \{D \in \mathrm{W} \mid \operatorname{div}D = 0\}$. 由引理 3.8 知, $\overline{\mathrm{S}}$ 是 W 的子代数.

引理 3.9 (1) S *是李超代数* $\overline{\mathrm{S}}$ *的理想.*

(2) $\overline{S} = S(m, n; \underline{t}) \oplus \sum\limits_{i\in Y_0} \mathbb{F}\cdot x^{(\pi-\pi_i\varepsilon_i)}x^E\mathrm{D}_i$.

证明 (1) 由第一章引理 2.5 的 2) 知, 对任意 $f \in \mathrm{hg}(\Lambda(m, n, \underline{t}))$, 有

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{div}(\mathrm{D}_{ij}(f))\\
&\quad = \operatorname{div}\left((-1)^{\tau(i)\tau(j)}\mathrm{D}_i(f)\mathrm{D}_j - (-1)^{\mathrm{d}(f)(\tau(i)+\tau(j))}\mathrm{D}_j(f)\mathrm{D}_i\right)\\
&\quad = (-1)^{\mathrm{d}(f)\tau(j)}\left(\mathrm{D}_j\mathrm{D}_i(f) - (-1)^{\tau(i)\tau(j)}\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j(f)\right)\\
&\quad = (-1)^{\mathrm{d}(f)\tau(j)}[\mathrm{D}_j, \mathrm{D}_i](f)\\
&\quad = 0.
\end{aligned}
$$

所以 $\mathrm{D}_{ij}(f) \in \overline{\mathrm{S}}$, 从而 $\mathrm{S} \subseteq \overline{\mathrm{S}}$.

设 $f\mathrm{D}_i, g\mathrm{D}_j \in \overline{\mathrm{S}}$, 其中 $f, g \in \mathrm{hg}(\Lambda(m, n, \underline{t}))$, 则 $\mathrm{D}_i(f) = 0$, $\mathrm{D}_j(g) = 0$. 从而

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{D}_{ij}(fg)\\
&\quad = (-1)^{\tau(i)\tau(j)}\mathrm{D}_i(fg)\mathrm{D}_j - (-1)^{\mathrm{d}(fg)(\tau(i)+\tau(j))}\mathrm{D}_j(fg)\mathrm{D}_i\\
&\quad = (-1)^{\tau(i)(\tau(j)+\mathrm{d}(f))} f(\mathrm{D}_i(g))\mathrm{D}_j - (-1)^{\mathrm{d}(fg)(\tau(i)+\tau(j))}(\mathrm{D}_j(f))g\mathrm{D}_i\\
&\quad = (-1)^{\tau(i)(\tau(j)+\mathrm{d}(f))}\left(f(\mathrm{D}_i(g))\mathrm{D}_j - (-1)^{\mathrm{d}(f\mathrm{D}_i)\mathrm{d}(g\mathrm{D}_j)} g(\mathrm{D}_j(f))\mathrm{D}_i\right)\\
&\quad = (-1)^{\tau(i)(\tau(j)+\mathrm{d}(f))}[f\mathrm{D}_i, g\mathrm{D}_j].
\end{aligned}
$$

所以

$$[f\mathrm{D}_i, g\mathrm{D}_j] = (-1)^{\tau(i)(\tau(j)+\mathrm{d}(f))}\mathrm{D}_{ij}(fg).$$

于是可知 $[\overline{\mathrm{S}}, \overline{\mathrm{S}}] \subseteq \mathrm{S}$. 因为 $\mathrm{S} \subseteq \overline{\mathrm{S}}$, 所以 $[\mathrm{S}, \overline{\mathrm{S}}] \subseteq \mathrm{S}$. 这就证明了 S 是 $\overline{\mathrm{S}}$ 的理想.

(2) 令

$$V = S(m,n;\underline{t}) + \sum_{i\in Y_0} \mathbb{F}\cdot x^{(\pi-\pi_i\varepsilon_i)}x^E\mathrm{D}_i.$$

首先我们将证明 $V = \overline{S}(m,n;\underline{t})$. 显然, $V \subseteq \overline{S}$. 为了证明 $\overline{S} \subseteq V$, 我们做以下准备工作.

(a) 若 $k \in Y_0$ 且 $\alpha_k = 0$, 或 $k \in Y_1$ 且 $k \notin \{u\}$, 则 $x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_k \in V$.

先考虑 $k \in Y_0$ 且 $\alpha_k = 0$ 的情形. 若对每个 $i \neq k$ 和 $u = E$, 有 $\alpha_i = \pi_i$, 则 $x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_k = x^{(\pi-\pi_k\varepsilon_k)}x^E\mathrm{D}_k \in V$. 否则, 存在 $i \in Y_0$, 满足 $i \neq k$ 及 $\alpha_i < \pi_i$, 或存在 $j \in Y_1$, 满足 $j \notin \{u\}$. 随之,

$$x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_k = \mathrm{D}_{ik}\left(x^{(\alpha+\varepsilon_i)}x^u\right) \in V$$

或

$$x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_k = \mathrm{D}_{jk}\left(x^{(\alpha)}x^{u+\langle j\rangle}\right) \in V.$$

再考虑 $k \in Y_1$ 且 $k \notin \{u\}$ 的情形. 由 D_{kk} 的定义, 我们有

$$x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_k = -\frac{1}{2}\mathrm{D}_{kk}\left(x^{(\alpha)}x^{u+\langle k\rangle}\right) \in V.$$

(b) 对 $k \in Y_0 \cup Y_1$, 我们断言:

$$x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_k \equiv (-1)^{\tau(k)\mathrm{d}(x^u)}\,\mathrm{D}_k\left(x^{(\alpha+\varepsilon_i)}x^u\right)\mathrm{D}_i \pmod V,$$

这里 $i \in Y_0$, 使得 $\alpha_i < \pi_i$; 以及

$$x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_k \equiv (-1)^{\tau(k)+\left(\tau(k)+\overline{1}\right)\mathrm{d}(x^{u+\langle j\rangle})}\,\mathrm{D}_k\left(x^{(\alpha)}x^{u+\langle j\rangle}\right)\mathrm{D}_j \pmod V,$$

这里 $j \in Y_1$ 且 $j \notin \{u\}$.

事实上, 上面的断言是下面两等式的直接结果:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_{ki}\left(x^{(\alpha+\varepsilon_i)}x^u\right) =& \mathrm{D}_k\left(x^{(\alpha+\varepsilon_i)}x^u\right)\mathrm{D}_i \\ &- (-1)^{\tau(k)\mathrm{d}(x^u)}\,x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_k;\\ \mathrm{D}_{kj}\left(x^{(\alpha)}x^{u+\langle j\rangle}\right) =& (-1)^{\tau(k)}\,\mathrm{D}_k\left(x^{(\alpha)}x^{u+\langle j\rangle}\right)\mathrm{D}_j \\ &- (-1)^{\left(\tau(k)+\overline{1}\right)\mathrm{d}(x^{u+\langle j\rangle})}\,x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_k.\end{aligned}$$

现在设

$$\mathrm{D} = \sum_{k=1}^{q}\sum_{\substack{\alpha\in A(m;\underline{t})\\ u\in B(n)}} \gamma(\alpha,u,i_k)\,x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_{i_k} \in \overline{S}(m,n;\underline{t}),$$

这里 $\gamma(\alpha,u,i_k) \in \mathbb{F}$, $\alpha \in A(m;\underline{t})$, $u \in B(n)$. 我们将对 q 用归纳法证明 $D \in V$.

若 $q = 1$, $D = \sum\limits_{\alpha,u}\gamma(\alpha,u,i_1)\,x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_{i_1}$, 则

$$0 = \mathrm{div}(D) = \sum_{\alpha,u}(-1)^{\tau(i_1)\mathrm{d}(x^u)}\,\gamma(\alpha,u,i_1)\,\mathrm{D}_{i_1}\left(x^{(\alpha)}x^u\right).$$

所以, 当 $i_1 \in Y_0$ 且 $\alpha_{i_1} \geq \varepsilon_i$ 时, 或 $i_1 \in Y_1$ 且 $i_1 \in \{u\}$ 时, $\gamma(\alpha, u, i_1) = 0$. 故由 (a) 知 $D \in V$.

设 $q \geq 2$. 由 (a) 我们可以假设

$$D = \sum_{\substack{i_k \in Y_0 \\ \varepsilon_{i_k} \leq \alpha \leq \pi}} \gamma(\alpha, u, i_k) x^{(\alpha)} x^u \mathrm{D}_{i_k} + \sum_{\substack{i_k \in Y_1 \\ i_k \in \{u\}}} \gamma(\alpha, u, i_k) x^{(\alpha)} x^u \mathrm{D}_{i_k}.$$

当 $i_q \in Y_0$ 时, 由 (b) 有

$$\begin{aligned} D \equiv & \sum_{\substack{i_q \neq i_k \in Y_0 \cup Y_1 \\ \alpha_{i_q} < \pi_{i_q}}} (-1)^{\tau(i_k)\mathrm{d}(x^u)} \gamma(\alpha, u, i_k) \mathrm{D}_{i_k} \left(x^{(\alpha+\varepsilon_{i_q})} x^u\right) \mathrm{D}_{i_q} \\ & + \sum_{\varepsilon_{i_q} \leq \alpha \leq \pi} \gamma(\alpha, u, i_q) x^{(\alpha)} x^u \mathrm{D}_{i_q} \\ & + \sum_{\substack{i_q \neq i_k \in Y_0 \cup Y_1 \\ \alpha_{i_q} = \pi_{i_q}}} \gamma(\alpha, u, i_k) x^{(\alpha)} x^u \mathrm{D}_{i_k} \pmod V. \end{aligned}$$

置

$$\begin{aligned} E_1 = & \sum_{\substack{i_q \neq i_k \in Y_0 \cup Y_1 \\ \alpha_{i_q} < \pi_{i_q}}} (-1)^{\tau(i_k)\mathrm{d}(x^u)} \gamma(\alpha, u, i_k) \mathrm{D}_{i_k} \left(x^{(\alpha+\varepsilon_{i_q})} x^u\right) \mathrm{D}_{i_q} \\ & + \sum_{\varepsilon_{i_q} \leq \alpha \leq \pi} \gamma(\alpha, u, i_q) x^{(\alpha)} x^u \mathrm{D}_{i_q}, \\ E_2 = & \sum_{\substack{i_q \neq i_k \in Y_0 \cup Y_1 \\ \alpha_{i_q} = \pi_{i_q}}} \gamma(\alpha, u, i_k) x^{(\alpha)} x^u \mathrm{D}_{i_k}. \end{aligned}$$

那么 $\mathrm{div}(E_1) + \mathrm{div}(E_2) = \mathrm{div}(D) = 0$, 这里

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(E_1) = & \sum_{\substack{i_q \neq i_k \in Y_0 \cup Y_1 \\ \alpha_{i_q} < \pi_{i_q}}} (-1)^{\tau(i_k)\mathrm{d}(x^u) + \tau(i_q)\mathrm{d}(x^u)} \gamma(\alpha, u, i_k) \mathrm{D}_{i_k} \left(x^{(\alpha)} x^u\right) \\ & + \sum_{\varepsilon_{i_q} \leq \alpha \leq \pi} \gamma(\alpha, u, i_q) x^{(\alpha - \varepsilon_{i_q})} x^u, \end{aligned}$$

$$\mathrm{div}(E_2) = \sum_{\substack{i_q \neq i_k \in Y_0 \cup Y_1 \\ \alpha_{i_q} = \pi_{i_q}}} (-1)^{\tau(i_k)\mathrm{d}(x^u)} \gamma(\alpha, u, i_k) \mathrm{D}_{i_k} \left(x^{(\alpha)} x^u\right).$$

注意 $\mathrm{div}(E_1)$ 中 x_q 的指数小于 π_{i_q}, 而 $\mathrm{div}(E_2)$ 中相应的指数等于 π_{i_q}. 因此, $\mathrm{div}(E_1) = \mathrm{div}(E_2) = 0$. 由归纳假设, 有 E_1, $E_2 \in V$, 从而 $D \in V$.

对于 $i_q \in Y_1$ 的情形, 我们略去同样的讨论. 因而有 $V = \overline{S}$. 下面我们证明:

$$V = S(m, n; \underline{t}) + \sum_{i \in Y_0} \mathbb{F} \cdot x^{(\pi - \pi_i \varepsilon_i)} x^E \mathrm{D}_i$$

是直和. 设

$$\sum_{\alpha,u,i,j}\gamma(\alpha,u,i,j)\,\mathrm{D}_{ij}\left(x^{(\alpha)}x^{u}\right)+\sum_{i\in Y_0}\gamma(i)\,x^{(\pi-\pi_i\varepsilon_i)}x^{E}\mathrm{D}_i=0,$$

这里 $\gamma(\alpha,u,i,j)\in\mathbb{F}$, $\gamma(i)\in\mathbb{F}$. 注意 $\mathrm{D}_{ii}=0$, 对任意 $i\in Y_0$. 上面的等式两边分别作用在 x_l 上, 其中 $l\in Y_0$, 则有

$$\gamma(l)\,x^{(\pi-\pi_l\varepsilon_l)}x^{E}\in\sum_{i\in Y_0,i\neq l}\mathbb{F}\cdot x^{(\alpha-\varepsilon_i)}x^{u}+\sum_{j\in Y_1}\mathbb{F}\cdot x^{(\alpha)}x^{u-\langle j\rangle}.$$

随之, 对任意 $l\in Y_0$, 有 $\gamma(l)=0$. 这便证明了直和. □

为计算方便, 下面的引理列出 S 中的几个运算公式.

引理 3.10 下列公式成立:

1) $\mathrm{D}_{ii}(f)=0,\forall i\in Y_0$;

$\mathrm{D}_{ii}(f)=-2\mathrm{D}_i(f)\mathrm{D}_i,\forall i\in Y_1$;

$\mathrm{D}_{ji}=-(-1)^{\mathrm{d}(f)(\tau(i)+\tau(j))+\tau(i)\tau(j)}\mathrm{D}_{ij}(f),\forall i,j\in Y.$

2) $[\mathrm{D}_k,\mathrm{D}_{ij}(f)]=(-1)^{\tau(k)\tau(i)}\mathrm{D}_{ij}(\mathrm{D}_k(f)),\forall k,i,j\in Y.$

3)
$$\begin{aligned}
&[\mathrm{D}_{ij}(f),\mathrm{D}_{kl}(g)]\\
&=(-1)^{\tau(i)\tau(k)+\tau(j)(\tau(i)+\mathrm{d}(f))+(\tau(k)+\tau(l))\mathrm{d}(f)}\mathrm{D}_{ik}(\mathrm{D}_j(f)\mathrm{D}_l(g))\\
&\quad-(-1)^{\tau(j)\tau(k)+\tau(j)\mathrm{d}(f)+(\tau(k)+\tau(l))\mathrm{d}(g)}\mathrm{D}_{jk}(\mathrm{D}_i(f)\mathrm{D}_l(g))\\
&\quad-(-1)^{\tau(i)\tau(l)+\tau(j)(\tau(i)+\mathrm{d}(f))+\tau(k)\tau(l)}\mathrm{D}_{il}(\mathrm{D}_j(f)\mathrm{D}_k(g))\\
&\quad+(-1)^{\tau(j)\tau(l)+\tau(j)\mathrm{d}(f)+\tau(k)\tau(l)}\mathrm{D}_{jl}(\mathrm{D}_i(f)\mathrm{D}_l(g)).
\end{aligned}$$

证明 利用 (1.1) 式直接验证可得 1) 中各等式. 2) 中的等式就是 §1 的 (1.2) 式. 利用 (1.1) 式与第一章引理 2.8(令第一章引理 2.8 中的 t_1,t_2,r_1 与 r_2 分别为 i,j,k 与 l), 直接计算可得 3). □

引理 3.11 设 $h_k=x_k\mathrm{D}_k$, $k\in Y$, 则 $h_k\in\mathrm{Norw(S)}$.

证明 只需证对任意 $\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^{u})$, 均有 $[h_k,\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^{u})]\in\mathrm{S}$. 我们分情况讨论.

(a) $k\in Y_0$. 若 $i,j\in Y_0$, 则

$$\begin{aligned}
&[h_k,\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^{u})]\\
&\quad=[x_k\mathrm{D}_k,x^{(\alpha-\varepsilon_i)}x^{u}\mathrm{D}_j]-[x_k\mathrm{D}_k,x^{(\alpha-\varepsilon_j)}x^{u}\mathrm{D}_i]\\
&\quad=(\alpha_k-\delta_{kj}-\delta_{ki})x^{(\alpha-\varepsilon_i)}x^{u}\mathrm{D}_j-(\alpha_k-\delta_{ki}-\delta_{kj})x^{(\alpha-\varepsilon_j)}x^{u}\mathrm{D}_i\\
&\quad=(\alpha_k-\delta_{kj}-\delta_{ki})\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^{u})\in\mathrm{S}.
\end{aligned}$$

若 $i,j\in Y_1$, 则可算得

$$[h_k,\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^{u})]=-2\alpha_k\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^{u})\in\mathrm{S}.$$

若 $i \in Y_0, j \in Y_1$, 则

$$[h_k, \mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^u)] = (\alpha_k - \delta_{ki})\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^u) \in \mathrm{S}.$$

若 $i \in Y_1, j \in Y_0$, 由引理 3.10 的 1) 知

$$[h_k, \mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^u)] = \lambda[h_k, \mathrm{D}_{ji}(x^{(\alpha)}x^u)] \in \mathrm{S},$$

其中 $\lambda = 1$ 或 -1.

(b) $k \in Y_1$, 并且 $k \notin \{i, j\}$. 若 $k \in \{u\}$, 我们断言 $x_k\mathrm{D}_k(\mathrm{D}_i(x^{(\alpha)}x^u)) = \mathrm{D}_i(x^{(\alpha)}x^u)$. 事实上, 当 $i \in Y_0$ 时, 有

$$\begin{aligned} x_k\mathrm{D}_k(\mathrm{D}_i(x^{(\alpha)}x^u)) &= x_k\mathrm{D}_k(x^{(\alpha-\varepsilon_i)}x^u) = x^{(\alpha-\varepsilon_i)}(x_k\mathrm{D}_k)(x^u) \\ &= x^{(\alpha-\varepsilon_i)}x^u = \mathrm{D}_i(x^{(\alpha)}x^u). \end{aligned}$$

当 $i \in Y_1$ 时, 因为 $i \neq k$, 故

$$\begin{aligned} x_k\mathrm{D}_k(\mathrm{D}_i(x^{(\alpha)}x^u)) &= x_k\mathrm{D}_k(x^{(\alpha)}\partial_i(x^u)) = x^{(\alpha)}(x_k\mathrm{D}_k)(\partial_i(x^u)) \\ &= x^{(\alpha)}\partial_i(x^u) = \mathrm{D}_i(x^{(\alpha)}x^u). \end{aligned}$$

所以断言成立. 同理知 $x_k\mathrm{D}_k(\mathrm{D}_j(x^{(\alpha)}x^u)) = \mathrm{D}_j(x^{(\alpha)}x^u)$. 因此

$$\begin{aligned} &[h_k, \mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^u)] \\ &= (-1)^{\tau(i)\tau(j)}(x_k\mathrm{D}_k)(\mathrm{D}_i(x^{(\alpha)}x^u))\mathrm{D}_j \\ &\quad -(-1)^{(\tau(i)+\tau(j))\mathrm{d}(x^u)}(x_k\mathrm{D}_k)(\mathrm{D}_j(x^{(\alpha)}x^u))\mathrm{D}_i \\ &= (-1)^{\tau(i)\tau(j)}\mathrm{D}_i(x^{(\alpha)}x^u)\mathrm{D}_j - (-1)^{(\tau(i)+\tau(j))\mathrm{d}(x^u)}\mathrm{D}_j(x^{(\alpha)}x^u)\mathrm{D}_i \\ &= \mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^u) \in \mathrm{S}. \end{aligned}$$

若 $k \notin \{u\}$, 则 $[h_k, \mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^u)] = 0 \in \mathrm{S}$.

(c) $k \in Y_1, k = i, k \neq j$. 则

$$\begin{aligned} &[h_k, \mathrm{D}_{kj}(x^{(\alpha)}x^u)] \\ &= (-1)^{(\tau(k)+\tau(j))\mathrm{d}(x^u)}\mathrm{D}_j(x^{(\alpha)}x^u)\mathrm{D}_k \\ &= -\mathrm{D}_{kj}(x^{(\alpha)}x^u) \in \mathrm{S}. \end{aligned}$$

(d) $k \in Y_1, k \neq i, k = j$. 则

$$[h_k, \mathrm{D}_{ik}(x^{(\alpha)}x^u)] = \lambda[h_k, \mathrm{D}_{ki}(x^{(\alpha)}x^u)] \in \mathrm{S},$$

其中 $\lambda = 1$ 或 -1.

综上知 $h_k \in \mathrm{Norw}(\mathrm{S})$. □

命题 3.12 设 $t \geq 0$. 令 $T = \sum_{k=1}^{s} \mathbb{F}h_k$, 其中 $h_k = x_k\mathrm{D}_k$. 则 $\mathrm{Der}_t(\mathrm{S}) = \mathrm{ad}\,(\overline{\mathrm{S}} + T)_t$.

证明 由引理 3.9 知, S 是 $\overline{\mathrm{S}}$ 的理想. 由引理 3.11 知 $T \subseteq \mathrm{Norw(S)}$, 故 $\mathrm{ad}(\overline{\mathrm{S}}+T) \subseteq \mathrm{Der(S)}$, 从而 $\mathrm{ad}(\overline{\mathrm{S}}+T)_t \subseteq \mathrm{Der}_t(\mathrm{S})$.

任取 $\phi \in \mathrm{Der}_t(\mathrm{S})$, 由命题 2.6 知存在 $y \in \mathrm{Norw(S)}$, 使得 $\phi = \mathrm{ad}\, y$. 因为 $\mathrm{D}_i \in \mathrm{S}, \forall i \in Y$, 所以 $[\mathrm{D}_i, y] \in \mathrm{S} \subseteq \overline{\mathrm{S}}$, 从而 $\mathrm{div}([\mathrm{D}_i, y]) = 0$. 显然 $\mathrm{div}(\mathrm{D}_i) = 0$, 于是由引理 3.8 可得 $\mathrm{D}_i(\mathrm{div}(y)) = 0, \forall i \in Y$. 故 $\mathrm{div}(y) \in \mathbb{F}$. 随之有 $\mathrm{div}(y - \mathrm{div}(y)h_1) = 0$, 所以 $y - \mathrm{div}(y)h_1 \in \overline{\mathrm{S}}$. 于是 $y \in \overline{\mathrm{S}}+T$. 因此 $\phi \in \mathrm{ad}(\overline{\mathrm{S}}+T)$. 这就得到 $\mathrm{Der}_t(\mathrm{S}) \subseteq \mathrm{ad}(\overline{\mathrm{S}}+T)_t$. 故 $\mathrm{Der}_t(\mathrm{S}) = \mathrm{ad}(\overline{\mathrm{S}}+T)_t$. □

命题 3.13 $\mathrm{Der}_{-1}(\mathrm{S}) = \mathrm{ad}\,\mathrm{S}_{-1}$.

证明 显然 $\mathrm{ad}\,\mathrm{S}_{-1} \subseteq \mathrm{Der}_{-1}(\mathrm{S})$. 设 $\phi \in \mathrm{Der}_{-1}(\mathrm{S})$. 我们知道

$$\mathrm{S}_0 = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^u) \mid i, j \in Y, |\alpha| + |u| = 2\}.$$

易知 $\mathrm{S}_0 = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{A_{ij}, x_i\mathrm{D}_j \mid i, j \in Y, i \neq j\}$, 其中

$$A_{ij} = x_i\mathrm{D}_i - (-1)^{\tau(i)+\tau(j)}x_j\mathrm{D}_j.$$

(i) 因为 $\mathrm{zd}(\phi) = -1$, 所以 $\phi(\mathrm{S}_0) \subseteq \mathrm{S}_{-1}$. 故可设 $\phi(A_{ij}) = \sum_{l=1}^{s} a_l\mathrm{D}_l$, 其中 $a_l \in \mathbb{F}$. 设 $\phi(A_{jh}) = \sum_{k=1}^{s} b_k\mathrm{D}_k$, 其中 $h \neq i, j$, $b_k \in \mathbb{F}$. 将 ϕ 作用于等式 $[A_{ij}, A_{jh}] = 0$, 可得 $a_h = 0$. 于是 $\phi(A_{ij}) = a_i\mathrm{D}_i + a_j\mathrm{D}_j$, 其中 $a_i, a_j \in \mathbb{F}$.

(ii) 可设 $\phi(x_i\mathrm{D}_j) = \sum_{k=1}^{s} c_k\mathrm{D}_k, c_k \in \mathbb{F}$. 应用 ϕ 于等式 $[A_{ij}, x_i\mathrm{D}_j] = (1+(-1)^{\tau(i)+\tau(j)}) \cdot x_i\mathrm{D}_j$, 利用 (i) 可推得 $c_k = 0$, 其中 $k \neq i, j$. 于是 $\phi(x_i\mathrm{D}_j) = c_i\mathrm{D}_i + c_j\mathrm{D}_j$. 设 $l \notin \{i, j\}$. 由 (i), 可设 $\phi(A_{li}) = a_l\mathrm{D}_l + a_i\mathrm{D}_i$. 将 ϕ 作用于等式

$$[A_{li}, x_i\mathrm{D}_j] = -(-1)^{\tau(l)+\tau(i)}x_i\mathrm{D}_j,$$

可推得 $c_i = 0$. 故 $\phi(x_i\mathrm{D}_j) = c_j\mathrm{D}_j, c_j \in \mathbb{F}$. 从而可设 $\phi(x_i\mathrm{D}_{i+1}) = r_i\mathrm{D}_{i+1}, r_i \in \mathbb{F}, i = 1, \cdots, s-1$, $\phi(x_s\mathrm{D}_1) = r_s\mathrm{D}_1, r_s \in \mathbb{F}$.

设 $\psi = \phi - \sum_{i=1}^{s} r_i(\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_i)$, 则 $\psi(x_i\mathrm{D}_{i+1}) = \psi(x_s\mathrm{D}_1) = 0$, $i = 1, \cdots, s-1$. 设 M 是由 $\{x_i\mathrm{D}_{i+1}, x_s\mathrm{D}_1 \mid i = 1, \cdots, s-1\}$ 生成的 S_0 的子代数. 易知 $x_i\mathrm{D}_j, A_{ij} \in M$, 其中 $1 \leq i \neq j \leq s$. 所以 $M = \mathrm{S}_0$. 考察 $\mathbb{Z}$- 次数知 $\psi(\mathrm{S}_{-1}) = 0$. 由引理 2.8 知 $\psi = 0$. 故 $\phi = \sum_{i=1}^{s} r_i(\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_i) \in \mathrm{ad}\,\mathrm{S}_{-1}$. 因此 $\mathrm{Der}_{-1}(\mathrm{S}) \subseteq \mathrm{ad}\,\mathrm{S}_{-1}$. 于是 $\mathrm{Der}_{-1}(\mathrm{S}) = \mathrm{ad}\,\mathrm{S}_{-1}$. □

命题 3.14 设 $T = \{\mathrm{D}_{ij}(x^{(k\varepsilon_j)}) \mid k \leq \pi_j, i \in Y, j \in Y_0\}$, $M = \{\mathrm{D}_{ij}(x_k s_l) \mid i, j, k, l \in Y\}$. 则 $T \cup M$ 生成 S.

证明 设 Q 是由 $T \cup M$ 生成的 S 的子代数. 我们分以下几步证明本命题.

(i) 对 t 用归纳法证明 $\mathrm{D}_{t-1\,t}(x^{(\pi_1\varepsilon_1+\cdots+\pi_t\varepsilon_t)}) \in Q$, 其中 $t \in Y_0$. 先考察 $t = 2$ 的情形. 设 $k, l \in Y_1, k \neq l$, 则有

$$\mathrm{D}_{1\,2}(x^{(2\varepsilon_1)}x_k) = [\mathrm{D}_{1\,2}(x^{(3\varepsilon_1)}), \mathrm{D}_{l\,1}(x_k x_l)] \in Q,$$

$$\mathrm{D}_{1\,k}(x^{((\pi_1-1)\varepsilon_1)}x_k) = -[\mathrm{D}_{1\,k}(x^{(\pi_1\varepsilon_1)}), \mathrm{D}_{1\,l}(x_l x_k)] \in Q,$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}_{1\,2}(x^{(\pi_1\varepsilon_1)}x_k)=[\mathrm{D}_{1\,2}(x^{(2\varepsilon_1)}x_k),\mathrm{D}_{1\,k}(x^{((\pi_1-1)\varepsilon_1)}x_k)]\in Q,\\
&\mathrm{D}_{2\,k}(x^{((\pi_1-1)\varepsilon_1+(\pi_2-1)\varepsilon_2)}x_k)=-[\mathrm{D}_{1\,2}(x^{(\pi_1\varepsilon_1)}x_k),\mathrm{D}_{k\,2}(x^{(\pi_2\varepsilon_2)})]\in Q,\\
&\mathrm{D}_{2\,k}(x^{(2\varepsilon_2)}x_k)=-[\mathrm{D}_{2\,k}(x^{(3\varepsilon_2)}),\mathrm{D}_{2\,l}(x_lx_k)]\in Q,\\
&\mathrm{D}_{2\,k}(x^{((\pi_1-1)\varepsilon_1+\pi_2\varepsilon_2)}x_k)=-[\mathrm{D}_{2\,k}(x^{((\pi_1-1)\varepsilon_1+(\pi_2-1)\varepsilon_2)}x_k),\mathrm{D}_{2\,k}(x^{(2\varepsilon_2)}x_k)]\in Q;
\end{aligned}\tag{3.2}$$

同理有

$$\mathrm{D}_{1\,k}(x^{(\pi_1\varepsilon_1+(\pi_2-1)\varepsilon_2)}x_k)\in Q.\tag{3.3}$$

此外,

$$\mathrm{D}_{1\,2}(x^{(2\varepsilon_2+\varepsilon_1)})=-[\mathrm{D}_{1\,2}(x^{(3\varepsilon_2)}),\mathrm{D}_{1\,2}(x^{(2\varepsilon_1)})]\in Q,$$

$$\mathrm{D}_{1\,2}(x^{(\pi_1\varepsilon_1+\varepsilon_2)})=[\mathrm{D}_{1\,2}(x^{(\pi_1\varepsilon_1)}),\mathrm{D}_{1\,2}(x^{(2\varepsilon_2+\varepsilon_1)})]\in Q,$$

$$\mathrm{D}_{k\,1}(x^{((\pi_2-1)\varepsilon_2)}x_k)=-[\mathrm{D}_{1\,2}(x^{(\pi_2\varepsilon_2)}),\mathrm{D}_{k\,2}(x^{(\varepsilon_2)}x_k)]+\mathrm{D}_{1\,2}(x^{(\pi_2\varepsilon_2)})\in Q,$$

$$\mathrm{D}_{1\,2}(x^{((\pi_1-1)\varepsilon_1+\pi_2\varepsilon_2)})=[\mathrm{D}_{1\,2}(x^{(\pi_1\varepsilon_1+\varepsilon_2)}),\mathrm{D}_{k\,1}(x^{((\pi_2-1)\varepsilon_2)}x_k)]\in Q,\tag{3.4}$$

$$\mathrm{D}_{1\,k}(x^{(2\varepsilon_1)}x_k)=[\mathrm{D}_{1\,k}(x^{(3\varepsilon_1)}),\mathrm{D}_{1\,l}(x_lx_k)]\in Q.\tag{3.5}$$

由 (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) 式可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{1\,2}(x^{(\pi_1\varepsilon_1+\pi_2\varepsilon_2)})&=-\mathrm{D}_{2\,1}(x^{(\pi_1\varepsilon_1+\pi_2\varepsilon_2)})\\
&=[\mathrm{D}_{1\,2}(x^{((\pi_1-1)\varepsilon_1+\pi_2\varepsilon_2)}x_k),\mathrm{D}_{1\,k}(x^{(2\varepsilon_1)}x_k)]\\
&\quad-\mathrm{D}_{1\,k}(x^{(\pi_1\varepsilon_1+(\pi_2-1)\varepsilon_2)}x_k)-\mathrm{D}_{2\,k}(x^{((\pi_1-1)\varepsilon_1+\pi_2\varepsilon_2)}x_k)\in Q.
\end{aligned}$$

故 $t=2$ 时结论成立.

假设 $t=i$ 时结论成立, 即 $\mathrm{D}_{i-1\,i}(x^{(\delta)})\in Q$, 其中 $\delta=\pi_1\varepsilon_1+\cdots+\pi_i\varepsilon_i$. 因为

$$\mathrm{D}_{i-1\ i}(x^{(\pi_{i-1}\varepsilon_{i-1}+\varepsilon_i)})=-[\mathrm{D}_{i-1\ i+1}(x^{(\pi_{i+1}\varepsilon_{i+1})}),\mathrm{D}_{i\ i+1}(x^{(2\varepsilon_{i+1}+\varepsilon_i)})]\in Q,$$

所以

$$\mathrm{D}_{i-1\ i}(x^{(\delta-\varepsilon_{i-1}+\pi_{i+1}\varepsilon_{i+1})})=-[\mathrm{D}_{i-1\ i}(x^{(\delta)}),\mathrm{D}_{i-1\ i}(x^{(\pi_{i+1}\varepsilon_{i+1}+\varepsilon_i)})]\in Q.$$

于是

$$\mathrm{D}_{i\ i+1}(x^{(\delta+\pi_{i+1}\varepsilon_{i+1})})=[\mathrm{D}_{i-1\ i}(x^{(\delta-\varepsilon_{i+1}+\pi_{i+1}\varepsilon_{i+1})}),\mathrm{D}_{i-1\ i+1}(x^{(3\varepsilon_{i-1})})]\in Q.$$

归纳法完成. 从而可得 $\mathrm{D}_{m-1\,m}(x^{(\pi)})\in Q$.

设 σ 是 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的任一个置换, 同理知

$$\mathrm{D}_{\sigma(m-1)\ \sigma(m)}(x^{(\pi_{\sigma(1)}\varepsilon_{\sigma(1)}+\cdots+\pi_{\sigma(m)}\varepsilon_{\sigma(m)})})\in Q.$$

显然 $\pi_{\sigma(1)}\varepsilon_{\sigma(1)}+\cdots+\pi_{\sigma(m)}\varepsilon_{\sigma(m)}=\pi$, 从而可知 $\mathrm{D}_{ij}(x^{(\pi)})\in Q$, $\forall i,j\in Y_0$.

(ii) 对 t 用归纳法证明 $\mathrm{D}_{r\,i}(x^{(\pi)}x_{m+1}x_{m+2}\cdots x_t)\in Q$, 其中 $r\in Y_1, i\in Y_0, t\in Y_1$.

设 $k \in Y_1\backslash\{r\}, j \in Y_0\backslash\{i\}$, 则有

$$\mathrm{D}_{r\,i}(x^{(2\varepsilon_i)}x_k) = [\mathrm{D}_{r\,i}(x^{(3\varepsilon_i)}), \mathrm{D}_{i\,j}(x_k x_j)] \in Q;$$

同理有 $\mathrm{D}_{r\,j}(x^{(2\varepsilon_j)}x_k) \in Q$. 由 (i) 知

$$\mathrm{D}_{r\,i}(x^{(\pi)}x_k) = [\mathrm{D}_{j\,i}(x^{(\pi)}), \mathrm{D}_{r\,j}(x^{(2\varepsilon_j)}x_k)] \in Q,$$

从而

$$\mathrm{D}_{r\,k}(x^{(\pi)}x_k) = -[\mathrm{D}_{r\,i}(x^{(\pi)}x_k), \mathrm{D}_{k\,i}(x^{(2\varepsilon_i)}x_k)] \in Q,$$

$$\mathrm{D}_{r\,i}(x^{(\pi)}x_{m+1}) = [\mathrm{D}_{r\,k}(x^{(\pi)}x_k), \mathrm{D}_{i\,k}(x_{m+1}x_k)] \in Q.$$

所以当 $t = m+1$ 时结论成立. 假设 $t = k$ 时结论成立, 即 $\mathrm{D}_{r\,i}(x^{(\pi)}x_{m+1}\cdots x_k) \in Q$, 其中 $r \in Y_1, i \in Y_0$. 取 $j \in Y_0\backslash\{i\}, l \in Y_1\backslash\{k+1\}$, 则

$$\mathrm{D}_{j\,i}(x^{(2\varepsilon_i)}x_{k+1}) = [\mathrm{D}_{i\,j}(x^{(3\varepsilon_i)}), \mathrm{D}_{l\,i}(x_l x_{k+1})] \in Q,$$

$$\mathrm{D}_{i\,j}(x_i x_j x_{k+1}) = [\mathrm{D}_{l\,i}(x_j x_l), \mathrm{D}_{j\,i}(x^{(2\varepsilon_i)}x_{k+1})] \in Q.$$

由归纳假设知

$$\mathrm{D}_{r\,i}(x^{(\pi)}x_{m+1}\cdots x_k x_{k+1}) = -[\mathrm{D}_{r\,i}(x^{(\pi)}x_{m+1}\cdots x_k), \mathrm{D}_{i\,j}(x_i x_j x_{k+1})] \in Q.$$

归纳法完成. 由此可得 $\mathrm{D}_{r\,i}(x^{(\pi)}x^E) \in Q, \forall r \in Y_1, \forall i \in Y_0$. 任取 $l \in Y_1\backslash\{r\}$, 则

$$\mathrm{D}_{r\,l}(x^{(\pi)}x^E) = -[\mathrm{D}_{r\,i}(x^{(\pi)}x^E), \mathrm{D}_{r\,l}(x_i x_r)] \in Q,$$

$$\mathrm{D}_{r\,r}(x^{(\pi)}x^E) = -[\mathrm{D}_{r\,i}(x^{(\pi)}x^E), \mathrm{D}_{r\,l}(x_i x_l)] \in Q,$$

其中 $i \in Y_0, r \in Y_1$. 任取 $i, j \in Y_0$, 则

$$\mathrm{D}_{i\,j}(x^{(\pi)}x^E) = [\mathrm{D}_{r\,i}(x^{(\pi)}x^E), \mathrm{D}_{j\,l}(x_l x_r)] \in Q,$$

其中 $r, l \in Y_1$. 综上, 我们证明了 $\mathrm{D}_{l\,k}(x^{(\pi)}x^E) \in Q, \forall l, k \in Y$.

(iii) 我们对 $t = (|\pi| + |E|) - (|\alpha| + |u|)$ 用归纳法证明 $\mathrm{D}_{i\,j}(x^{(\alpha)}x^u) \in Q$, 其中 $\alpha \in A(m, \underline{t}), u \in B(n)$. 当 $t = 0$ 时, 由 (ii) 知结论成立. 设 $t \geq 1$. 若 $|\alpha| < |\pi|$, 则存在 $k \in Y_0$, 使得 $x^{(\alpha+\varepsilon_k)}x^u \in \Lambda(m, n, \underline{t})$. 由归纳假设知 $\mathrm{D}_{i\,j}(x^{(\alpha+\varepsilon_k)}x^u) \in Q$, 从而 $\mathrm{D}_{i\,j}(x^{(\alpha)}x^u) = [\mathrm{D}_k, \mathrm{D}_{i\,j}(x^{(\alpha+\varepsilon_k)}x^u)] \in Q$.

若 $\alpha = \pi$, 由 $t \geq 1$ 知 $|u| < |E|$. 故存在 $k \in Y_1$, 使得 $x_k x^u \neq 0$. 由归纳假设知

$$\mathrm{D}_{i\,j}(x^{(\alpha)}x^u) = (-1)^{\tau(k)\tau(i)}[\mathrm{D}_k, \mathrm{D}_{i\,j}(x^{(\alpha)}x_k x^u)] \in Q.$$

归纳法完成. 由 (iii) 知 $Q = \mathrm{S}$. □

引理 3.15 设 $\phi \in \mathrm{Der}_{-t}(\mathrm{S})$, 其中 $t > 1$. 若 $\phi(\mathrm{D}_{ij}(x^{((t+1)\varepsilon_j)})) = 0, \forall j \in Y_0$, $i \in Y$, 则 $\phi = 0$.

证明　若 $k \le t$, 考察 $\mathbb{Z}$- 次数知 $\phi(\mathrm{D}_{ij}(x^{(k\varepsilon_j)})) = 0$. 由已知, $\phi(\mathrm{D}_{ij}(x^{((t+1)\varepsilon_j)})) = 0$. 设 $k > t+1$. 对 k 用归纳法证明 $\phi(\mathrm{D}_{ij}(x^{(k\varepsilon_j)})) = 0$. 假设 $\phi(\mathrm{D}_{ij}(x^{(k-1)\varepsilon_j)})) = 0$. 因为

$$[\mathrm{D}_l, \mathrm{D}_{ij}(x^{(k\varepsilon_j)})] = (-1)^{\tau(l)\tau(i)}\delta_{jl}\mathrm{D}_{ij}(x^{((k-1)\varepsilon_j)}), \quad \forall l \in Y,$$

所以, 由引理 2.7 知 $\phi(\mathrm{D}_{ij}(x^{(k\varepsilon_j)})) \in \mathrm{S}_{-1}$. 又因为 $\phi(\mathrm{D}_{ij}(x^{(k\varepsilon_j)})) \in \mathrm{S}_{k-2-t}$, 并且 $k-2-t > -1$, 所以 $\phi(\mathrm{D}_{ij}(x^{(k\varepsilon_j)})) = 0$, $\forall j \in Y_0, \forall i \in Y$. 显然 $\phi(\mathrm{D}_{ij}(x_k x_l)) \in \mathrm{S}_{-t} = 0$. 由命题 3.14 知 $\phi(\mathrm{S}) = 0$. 故 $\phi = 0$. □

命题 3.16　设 $t > 1$. *若不存在正整数* k, *使得* $t = p^k$, 则 $\mathrm{Der}_{-t}(\mathrm{S}) = 0$.

证明　设 $\phi \in \mathrm{Der}_{-t}(\mathrm{S})$. 分以下两种情况讨论.

(i) $t \not\equiv 0 \pmod p$. 因为 $\phi(\mathrm{S}_{t-1}) \subseteq \mathrm{S}_{-1}$, 故可设 $\phi(\mathrm{D}_{ij}(x^{((t+1)\varepsilon_j)})) = \sum_{l=1}^{s} a_l \mathrm{D}_l$, 其中 $a_l \in \mathbb{F}, i \in Y, j \in Y_0$.

若 $k \ne i$, 将 ϕ 作用于等式 $[\mathrm{D}_{ij}(x^{((t+1)\varepsilon_j)}), \mathrm{D}_{ji}(x_j x_k)] = 0$, 可得 $a_k = 0$. 从而

$$\phi(\mathrm{D}_{ij}(x^{((t+1)\varepsilon_j)}) = a_i \mathrm{D}_i. \tag{3.6}$$

若 $i \in Y_0$, 则

$$[\mathrm{D}_{ij}(x^{((t+1)\varepsilon_j)}), \mathrm{D}_{ij}(x_j x_i)] = -(t+1)\mathrm{D}_{ij}(x^{((t+1)\varepsilon_j)}). \tag{3.7}$$

若 $i \in Y_1$, 则

$$\begin{aligned}
&[\mathrm{D}_{ij}(x^{((t+1)\varepsilon_j)}), \mathrm{D}_{ij}(x_j x_i)] \\
&= -(t+1)\mathrm{D}_{ij}(x^{((t+1)\varepsilon_j)}) + \mathrm{D}_{ii}(x^{(t\varepsilon_j)} x_i) \\
&= -(t-1)\mathrm{D}_{ij}(x^{((t+1)\varepsilon_j)}).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

将 ϕ 作用于 (3.7) 式, 利用 (3.6) 式可得

$$[a_i \mathrm{D}_i, x_j \mathrm{D}_j - x_i \mathrm{D}_i] = -(t+1) a_i \mathrm{D}_i.$$

于是有 $t a_i \mathrm{D}_i = 0$. 将 ϕ 作用于 (3.8) 式, 利用 (3.6) 式也可得 $t a_i \mathrm{D}_i = 0$, 从而 $a_i = 0, \forall i \in Y$. 故 $\phi(\mathrm{D}_{ij}(x^{((t+1)\varepsilon_j)}) = 0, \forall i \in Y$. 由引理 3.15 知 $\phi = 0$.

(ii) $t \equiv 0 \pmod p$. 将 t 写成 p-adic 数的形式 $t = \sum_{i=1}^{r} a_i p^i$, 其中 $a_r \ne 0$. 由已知, 若 $a_1 = \cdots = a_{r-1} = 0$, 则 $a_r > 1$. 从而可知

$$\binom{t}{p^r} \not\equiv 0 \pmod p, \quad \binom{t}{p^r - 1} \equiv 0 \pmod p.$$

故

$$\binom{t+1}{p^r} = \binom{t}{p^r} + \binom{t}{p^r - 1} \not\equiv 0 \pmod p.$$

显然 $t-p^r+2<t-1$, $p^r+1<t+1$. 考察 $\mathbb{Z}$- 次数知 $\phi(\mathrm{D}_{ij}(x^{((t-p^r+2)\varepsilon_j)}))=\phi(\mathrm{D}_{ij}(x^{(p^r\varepsilon_j)}x_i))=0$, 其中 $j\in Y_0, i\in Y$. 将 ϕ 作用于等式

$$[\mathrm{D}_{ij}(x^{((t-p^r+2)\varepsilon_j)}),\mathrm{D}_{ij}(x^{(p^r\varepsilon_j)}x_i)]=-\binom{t+1}{p^r}\mathrm{D}_{ij}(x^{((t+1)\varepsilon_j)}),$$

可知 $\phi(\mathrm{D}_{ij}(x^{((t+1)\varepsilon_j)})=0, \forall j\in Y_0,\ i\in Y$. 由引理 3.15 知 $\phi=0$. □

命题 3.17 设 $t=p^r$, 其中 $r>0$. 则

$$\mathrm{Der}_{-t}(\mathrm{S})=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{(\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_i)^t\mid i\in \mathrm{Y}_0\}.$$

证明 设 $\phi\in\mathrm{Der}_{-t}(\mathrm{S})$, 则 $\mathrm{zd}(\phi(\mathrm{D}_{ij}(x^{(t\epsilon_j)}x_i))=-t+(t-1)=-1$. 故可设 $\phi(\mathrm{D}_{ij}(x^{(t\epsilon_j)}\cdot x_i))=\sum_{l=1}^s b_l\mathrm{D}_l$, 其中 $b_l\in\mathbb{F}, j\in Y_0, i\in Y$. 因为 $t\equiv 0 \pmod p$, 所以

$$\begin{aligned}[\mathrm{D}_{ij}(x^{(t\varepsilon_j)}x_i),\mathrm{D}_{ij}(x_jx_i)] &= \mathrm{D}_{ij}(x^{(t\varepsilon_j)}x_i)+t\mathrm{D}_{ij}(x^{(t\varepsilon_j)})\\ &= \mathrm{D}_{ij}(x^{(t\varepsilon_j)}x_i), \end{aligned}\tag{3.9}$$

其中 $j\in Y_0, i\in Y$. 应用 ϕ 于 (3.9) 式, 可得 $b_l=0$, 其中 $l\neq j,i$. 则

$$\phi(\mathrm{D}_{ij}(x^{(t\varepsilon_j)}x_i))=b_i\mathrm{D}_i+b_j\mathrm{D}_j.\tag{3.10}$$

设 $\phi(\mathrm{D}_{ij}(x^{((t+1)\varepsilon_j)})=\sum_{l=1}^s a_l\mathrm{D}_l$. 应用 ϕ 于等式

$$[\mathrm{D}_{ij}(x^{((t+1)\varepsilon_j)}),\mathrm{D}_{ji}(x_jx_k)]=0,\ k\neq i,$$

可得 $a_l=0$, 其中 $l\neq i$. 因而

$$\phi(\mathrm{D}_{ij}(x^{((t+1)\varepsilon_j)}))=a_i\mathrm{D}_i,\ i\in Y.\tag{3.11}$$

应用 ϕ 于等式

$$[\mathrm{D}_{ij}(x^{(t\varepsilon_j)}x_i),\mathrm{D}_{ij}(x^{(2\varepsilon_j)})]=\mathrm{D}_{ij}(x^{((t+1)\varepsilon_j)}),$$

并利用 (3.10) 与 (3.11) 式可得 $a_i=-b_j$.

设 $l\neq i$. 由 (5.11) 式可得 $\phi(\mathrm{D}_{lj}(x^{((t+1)\varepsilon_j)}))=c_l\mathrm{D}_l$, 其中 $c_l\in\mathbb{F}$. 将 ϕ 作用于等式

$$[\mathrm{D}_{ij}(x^{(t\varepsilon_j)}x_i),\mathrm{D}_{jl}(x^{(2\varepsilon_j)})]=-\mathrm{D}_{lj}(x^{((t+1)\varepsilon_j)}),$$

则可得 $c_l=-b_j$. 综上, 我们证明了对任意 $j\in Y_0$, 存在 $b_j\in\mathbb{F}$, 使得对任意 $l\in Y\backslash\{j\}$, 均有

$$\phi(\mathrm{D}_{lj}(x^{((t+1)\varepsilon_j)}))=-b_j\mathrm{D}_l.$$

令 $\psi=\phi-\sum_{j=1}^m b_j(\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_j)^t$, 则 $\psi(\mathrm{D}_{lk}(x^{((t+1)\varepsilon_k)}))=0$, 其中 $k\in Y_0, l\in Y$. 由引理 3.15 知 $\psi=0$. 故 $\phi=\sum_{j=1}^m b_j(\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_j)^t\in\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{(\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_j)^t\mid j\in Y_0\}$. □

由命题 3.12, 3.13, 3.16, 3.17 与命题 2.9 可得以下定理.

定理 3.18 $\mathrm{Der}(\mathrm{S})=\mathrm{ad}(\overline{\mathrm{S}}+T)\oplus\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{(\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_i)^{p^{k_i}}\mid i\in Y_0, 1\leq k_i\leq t_i-1\}$.

§4 H 的导子超代数

我们讨论李超代数 H 的导子超代数, 这里 $\mathrm{H} = \mathrm{H}(m, n, \underline{t})$, 并且 $m = 2r$ 是偶数. 由 §1 节知 $\mathrm{H} = \bigoplus_{i=-1}^{\xi-3} \mathrm{H}_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数.

设 $\theta \in \mathbb{Z}_2$. 令

$$\widetilde{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})_\theta = \left\{ \sum_{i=1}^{s} f_i \mathrm{D}_i \in \mathrm{W} \;\middle|\; \mathrm{D}_i(f_{j'}) = (-1)^{\tau(i)\tau(j)+(\tau(i)+\tau(j))\theta}\sigma(i)\sigma(j)\mathrm{D}_j(f_{i'}), \forall i,j \in Y \right\},$$

其中 i' 与 $\sigma(i)$ 分别按第一章 (2.11) 与 (2.12) 式定义. 令

$$\widetilde{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t}) = \widetilde{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})_{\overline{0}} \oplus \widetilde{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})_{\overline{1}}.$$

通常我们简记 $\widetilde{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})$ 为 $\widetilde{\mathrm{H}}$.

引理 4.1 设 $\sum_{i=1}^{s} f_i\mathrm{D}_i \in \widetilde{\mathrm{H}}_\theta$, $\sum_{j=1}^{s} g_j\mathrm{D}_j \in \widetilde{\mathrm{H}}_\mu$, 其中 $\theta, \mu \in \mathbb{Z}_2$. 则

$$\left[\sum_{i=1}^{s} f_i\mathrm{D}_i, \sum_{j=1}^{s} g_j\mathrm{D}_j\right] = \mathrm{D_H}(h),$$

其中 $h = \sum_{i=1}^{s} \sigma(i)(-1)^{\tau(i)\mu} f_i g_{i'}$.

证明 由已知, 对任意的 $i, j \in Y$, 有

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_i(f_{j'}) &= (-1)^{\tau(i)\tau(j)+(\tau(i)+\tau(j))\theta}\sigma(i)\sigma(j)\mathrm{D}_j(f_{i'}), \\ \mathrm{D}_i(g_{j'}) &= (-1)^{\tau(i)\tau(j)+(\tau(i)+\tau(j))\mu}\sigma(i)\sigma(j)\mathrm{D}_j(g_{i'}). \end{aligned} \tag{4.1}$$

于是, 完全仿照第一章引理 2.10 的证明即可证得本引理. □

引理 4.2 *以下命题成立:*

1) $\widetilde{\mathrm{H}}$ 是 W 的子代数.

2) $\mathrm{H} \subseteq \widetilde{\mathrm{H}}$.

3) H 是 $\widetilde{\mathrm{H}}$ 的理想.

证明 1) 此为引理 4.1 的直接结果.

2) 任取 $\mathrm{D_H}(f) \in \mathrm{H}_\theta$, 其中 $\theta \in \mathbb{Z}_2$. 设 $\mathrm{D_H}(f) = \sum_{i=1}^{s} f_i\mathrm{D}_i$, 则 $f_i = \sigma(i')(-1)^{\tau(i')\theta}\mathrm{D}_{i'}(f)$. 直接验证可知, $\{f_i \mid i \in Y\}$ 满足 (4.1) 式, 故 $\sum_{i=1}^{s} f_i\mathrm{D}_i \in \widetilde{\mathrm{H}}_\theta$, 即 $\mathrm{D}_H(f) \in \widetilde{\mathrm{H}}_\theta$, 所以 $\mathrm{H}_\theta \subseteq \widetilde{\mathrm{H}}_\theta$. 于是 $\mathrm{H} \subseteq \widetilde{\mathrm{H}}$.

3) 由 2) 与 1) 知, $[\mathrm{H}, \widetilde{\mathrm{H}}] \subseteq [\widetilde{\mathrm{H}}, \widetilde{\mathrm{H}}] \subseteq \widetilde{\mathrm{H}}$. 故 H 是 $\widetilde{\mathrm{H}}$ 的理想. □

设 R 是域 $\mathbb{F}$ 上有 1 的结合代数, 则 R 是环, 并可设 $\mathbb{F} \subseteq R$. 令 $R(2r, \underline{t})$ 是 R 上具有生成元 $\{x^{(\alpha)} \mid \alpha \in A(2r, \underline{t})\}$ 的除幂代数. 于是

$$R(2r, t) = \mathrm{span}_R\{x^{(\alpha)} \mid \alpha \in A(m, \underline{t})\}.$$

仍设 $Y_0 = \{1, 2, \cdots, 2r\}$, 其中 $2r = m$. 令 $\mathrm{D}_i \in \mathrm{Der}\,(R(2r, \underline{t}))$, 使得 $\mathrm{D}_i(x^{(\alpha)}) = x^{(\alpha-\varepsilon_i)}, \forall i \in Y_0$.

引理 4.3 设 $f_i \in R(2r,\underline{t})$, $i \in Y_0$. 若 f_i 是 $x_{i'}$- 截头的,$\forall i \in Y_0$, 并且 $\mathrm{D}_i(f_{j'}) = \sigma(i)\sigma(j)\mathrm{D}_j(f_{i'})$, $\forall i \in Y_0$, 则存在 $f \in R(2r,\underline{t})$, 使得 $\mathrm{D}_i(f) = \sigma(i)f_{i'}, \forall i \in Y_0$.

证明 对 r 用归纳法证明本引理. 设 $r = 1$. 由已知, $\mathrm{D}_1(f_{2'}) = -\mathrm{D}_2(f_{1'})$, 即 $\mathrm{D}_1(f_1) = -\mathrm{D}_2(f_2)$. 可设

$$\mathrm{D}_1(f_1) = -\mathrm{D}_2(f_2) = \sum_{i_1,i_2\geq 0} a_{i_1i_2}x^{(i_1\varepsilon_1+i_2\varepsilon_2)},$$

其中 $a_{i_1i_2} \in R$. 又设

$$f_1 = \sum_{i_1,i_2\geq 0} a_{i_1i_2}x^{((i_1+1)\varepsilon_1+i_2\varepsilon_2)} + \sum_{j\geq 0} b_jx^{(j\varepsilon_2)}, \quad b_j \in R,$$

$$f_2 = -\sum_{i_1,i_2\geq 0} a_{i_1i_2}x^{(i_1\varepsilon_1+(i_2+1)\varepsilon_2)} + \sum_{j\geq 0} c_jx^{(j\varepsilon_1)}, \quad c_j \in R.$$

令

$$f = -\sum_{i_1,i_2\geq 0} a_{i_1i_2}x^{((i_1+1)\varepsilon_1+(i_2+1)\varepsilon_2)} + \sum_{j\geq 0} c_jx^{((j+1)\varepsilon_1)} - \sum_{j\geq 0} b_jx^{((j+1)\varepsilon_2)}.$$

因为 f_i 是 $x_{i'}$- 截头的, 其中 $i = 1, 2$, 所以上式右边的后两项仍属于 $R(2,\underline{t})$, 从而 $f \in R(2,\underline{t})$. 易见 $\mathrm{D}_1(f) = f_2 = \sigma(1)f_{1'}$, $\mathrm{D}_2(f) = -f_1 = \sigma(2)f_{2'}$. 于是当 $r = 1$ 时, 引理成立.

假设对 $r-1$, 引理成立. 我们可记 $R(2r,\underline{t}) = R'(2(r-1),\underline{t}')$, 其中 $\underline{t}' = (t_1,\cdots,t_{r-1}, t_{r+1},\cdots,t_{2r-1})$, $R' = R(2,\underline{t}'')$, $\underline{t}'' = (t_r,t_{2r})$. 由归纳假设, 存在 $f_0 \in R'(2(r-1),\underline{t}')$, 使得 $\mathrm{D}_i(f_0) = \sigma(i)f_{i'}$, 其中 $i \in Y_0\backslash\{r,2r\}$. 于是有

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_r(f_i) &= \mathrm{D}_r(\sigma(i')\mathrm{D}_{i'}(f_0)) = \mathrm{D}_r\mathrm{D}_{i'}(\sigma(i')f_0)\\ &= \mathrm{D}_{i'}\mathrm{D}_r(\sigma(i')f_0) \quad, \forall i \in Y_0\backslash\{r,2r\}.\end{aligned}$$

由已知, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_r(f_i) =&\mathrm{D}_r(f_{(i')'}) = \sigma(r)\sigma(i')\mathrm{D}_{i'}(f_{r'})\\ =&\sigma(r)\sigma(i')\mathrm{D}_{i'}(f_{2r}),\end{aligned}$$

所以 $\sigma(r)\sigma(i')\mathrm{D}_{i'}(f_{2r}) = \mathrm{D}_{i'}\mathrm{D}_r(\sigma(i')f_0)$. 于是

$$\mathrm{D}_{i'}(\mathrm{D}_r(f_0) - \sigma(r)f_{2r}) = 0, \quad \forall i' \in Y_0\backslash\{r,2r\}. \tag{4.2}$$

设 $g = \mathrm{D}_r(f_0) - \sigma(r)f_{2r}$. 由 (4.2) 式知 $g \in R'$. 设 $g' = \mathrm{D}_{2r}(f_0) - \sigma(2r)f_r$, 同理可推得 $g' \in R'$. 进而有

$$\mathrm{D}_r(g') = \mathrm{D}_r\mathrm{D}_{2r}(f_0) - \sigma(2r)\mathrm{D}_r(f_r),$$

$$\mathrm{D}_{2r}(g) = \mathrm{D}_{2r}\mathrm{D}_r(f_0) - \sigma(r)\mathrm{D}_{2r}(f_{2r}).$$

由已知, $\mathrm{D}_r(f_r) = \sigma(r)\sigma(r')\mathrm{D}_{r'}(f_{r'}) = -\mathrm{D}_{2r}(f_{2r})$, 所以 $\mathrm{D}_r(g') = \mathrm{D}_{2r}(g)$. 于是 $\mathrm{D}_r(-g') = -\mathrm{D}_{2r}(g)$. 因为当 $m = 2$ 时引理成立, 所以存在 $h \in R'$, 使得 $\mathrm{D}_r(h) = g, \mathrm{D}_{2r}(h) = g'$.

令 $f = f_0 - h$, 则有

$$\mathrm{D}_i(f) = \mathrm{D}_i(f_0) = \sigma(i) f_{i'}, \quad i \in Y_0 \backslash \{r, 2r\},$$

$$\mathrm{D}_r(f) = \mathrm{D}_r(f_0) - \mathrm{D}_r(h) = \mathrm{D}_r(f_0) - g = \sigma(r) f_{2r} = \sigma(r) f_{r'},$$

$$\mathrm{D}_{2r}(f) = \mathrm{D}_{2r}(f_0) - \mathrm{D}_{2r}(h) = \mathrm{D}_{2r}(f_0) - g' = \sigma(2r) f_r = \sigma(2r) f_{(2r)'}.$$

归纳法完成. 引理得证. □

引理 4.4 设 $m = 2r$, $m \leq k \leq s$, 其中 $s = m + n$. 令 $f_i \in \Lambda(m, n, \underline{t})_\theta$, 这里 $\theta \in \mathbb{Z}_2, i = 1, 2, \cdots, k$. 假设 f_i 是 $x_{i'}$- 截头的, 并且

$$\mathrm{D}_i(f_{j'}) = (-1)^{\tau(i)\tau(j) + (\tau(i) + \tau(j))\theta} \sigma(i) \sigma(j) \mathrm{D}_j(f_{i'}), \tag{4.3}$$

$i, j = 1, 2, \cdots, k$. 那么, 存在 $f \in \Lambda(m, n, \underline{t})_\theta$, 使得

$$\mathrm{D}_i(f) = \sigma(i)(-1)^{\tau(i)\theta} f_{i'} \quad, i = 1, 2, \cdots, k.$$

证明 对 k 用归纳法. 由引理 4.3 知, 当 $k = m$ 时本引理结论正确. 设 $k > m$. 假设对 $k - 1$, 引理结论成立, 即存在 $g \in \Lambda(m, n, \underline{t})_0$, 使得 $\mathrm{D}_i(g) = \sigma(i)(-1)^{\tau(i)\theta} f_{i'}$, $\quad i = 1, 2, \cdots, k - 1$. 则

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_k(f_i) &= \mathrm{D}_k(\sigma(i')(-1)^{\tau(i')\theta} \mathrm{D}_{i'}(g)) \\
&= \mathrm{D}_k \mathrm{D}_{i'}(\sigma(i')(-1)^{\tau(i')\theta} g) \\
&= (-1)^{\tau(i')} \mathrm{D}_{i'} \mathrm{D}_k(\sigma(i')(-1)^{\tau(i')\theta} g) \\
&= \mathrm{D}_{i'} \mathrm{D}_k(\sigma(i')(-1)^{\tau(i') + \tau(i')\theta} g).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

由已知,

$$\mathrm{D}_k(f_i) = (-1)^{\tau(k)\tau(i') + (\tau(k) + \tau(i'))\theta} \sigma(k) \sigma(i') \mathrm{D}_{i'}(f_k). \tag{4.5}$$

由 (4.4) 与 (4.5) 式知

$$\mathrm{D}_{i'} \mathrm{D}_k(\sigma(i')(-1)^{\tau(i') + \tau(i')\theta} g) = (-1)^{\tau(k)\tau(i') + (\tau(k) + \tau(i'))\theta} \sigma(k) \sigma(i') \mathrm{D}_{i'}(f_k).$$

于是 $\mathrm{D}_{i'} \mathrm{D}_k(g) = (-1)^\theta \mathrm{D}_{i'}(f_k)$. 故 $\mathrm{D}_{i'}(\mathrm{D}_k(g) - (-1)^\theta f_k) = 0$, $i' = 1, 2, \cdots, k - 1$. 因此, 可设 $\mathrm{D}_k(g) - (-1)^\theta f_k = a x_k + b$, 这里 a 与 b 满足条件: $\mathrm{D}_{i'}(a) = \mathrm{D}_{i'}(b)$, $i = 1, 2, \cdots, k$.

由已知, f_k 是 $x_{k'}$- 截头的. 因为 $k' = k$, 故 f_k 是 x_k- 截头的. 于是 $\mathrm{D}_k(g) - (-1)^\theta f_k$ 是 x_k- 截头的, 从而 $a = 0$. 因此 $\mathrm{D}_k(g) = (-1)^\theta f_k + b$, 并且 $\mathrm{D}_i(b) = 0, i = 1, 2, \cdots, k$. 令 $f = g - b x_k$, 则

$$\mathrm{D}_i(f) = \mathrm{D}_i(g) = \sigma(i)(-1)^{\tau(i)\theta} f_{i'}, \quad i = 1, 2, \cdots, k - 1,$$

$$\mathrm{D}_k(f) = \mathrm{D}_k(g) - b = (-1)^\theta f_k = \sigma(k)(-1)^{\tau(k)\theta} f_{k'}.$$

归纳法完成, 引理得证. □

在第一章 §2 节中, 我们定义了 $\overline{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})$. 我们知道

$$\overline{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})=\mathrm{H}(m,n,\underline{t})\oplus\mathbb{F}\mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E).$$

直接验证可知 $\mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E)\in\widetilde{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})$, 故 $\overline{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})\subseteq\widetilde{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})$.

引理 4.5 $\widetilde{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})=\mathrm{H}(m,n,\underline{t}+\underline{1})\cap\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$, 其中 $\underline{1}=(1,1,\cdots,1)$.

证明 显然 $\mathrm{H}(m,n,\underline{t}+\underline{1})\subseteq\mathrm{H}(m,n)$. 所以

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(m,n,\underline{t}+\underline{1})\cap\mathrm{W}(m,n,\underline{t})&\subseteq\mathrm{H}(m,n)\cap\mathrm{W}(m,n,\underline{t})\\&=\overline{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})\subseteq\widetilde{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t}).\end{aligned}$$

反之, 任取 $y\in\widetilde{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})$, 则 $y\in\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$. 设 $y=\sum_{i=1}^{s}f_i\mathrm{D}_i$, 则 $f_i\in\Lambda(m,n,\underline{t}),\forall i\in Y$. 对任意 $i\in Y_0$, 显然 f_i 作为 $\Lambda(m,n,\underline{t}+\underline{1})$ 的元素是 $x_{i'}$- 截头的. 由 $y\in\widetilde{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})$ 知, 对任意 $i\in Y_1$, 有 $\mathrm{D}_i(f_i)=-\mathrm{D}_{i'}(f_{i'})=-\mathrm{D}_i(f_i)$, 故 $\mathrm{D}_i(f_i)=0$. 所以 f_i 是 $x_{i'}$- 截头的, $\forall i\in Y_1$. 因为 $y\in\widetilde{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})$, 故 $\{f_i\mid i\in Y\}$ 满足 (4.3) 式 ((4.3) 式中的 k 取为 s). 由引理 4.4 知, 存在 $f\in\Lambda(m,n,\underline{t})_\theta$ 使得 $f_i=\sigma(i')(-1)^{\tau(i')\theta}\mathrm{D}_{i'}(f)$, $\forall i\in Y$. 所以

$$y=\sum_{i=1}^{s}\sigma(i)(-1)^{\tau(i)\theta}\mathrm{D}_i(f)\mathrm{D}_{i'}=\mathrm{D_H}(f)\in\mathrm{H}(m,n,\underline{t}+\underline{1}).$$

故 $\widetilde{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})\subseteq\mathrm{H}(m,n,\underline{t}+\underline{1})\cap\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$. 从而

$$\widetilde{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})=\mathrm{H}(m,n,\underline{t}+\underline{1})\cap\mathrm{W}(m,n,\underline{t}).\qquad\square$$

引理 4.6 我们有子空间直和分解:

$$\widetilde{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})=\mathrm{H}(m,n,\underline{t})\oplus\mathbb{F}\mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E)\oplus\sum_{i=1}^{m}\mathbb{F}\mathrm{D_H}(x^{(p^{t_i}\varepsilon_i)}).$$

证明 由引理 4.5, 只需证

$$\begin{aligned}&\mathrm{H}(m,n,\underline{t}+\underline{1})\cap\mathrm{W}(m,n,\underline{t})\\&=\mathrm{H}(m,n,\underline{t})\oplus\mathbb{F}\mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E)\oplus\sum_{i=1}^{m}\mathbb{F}\mathrm{D_H}(x^{(p^{t_i}\varepsilon_i)}).\end{aligned}$$

事实上,“$\supseteq$” 是显然的. 反之, 任取 $\mathrm{D_H}(x^{(\alpha)}x^u)\in\mathrm{H}(m,n,\underline{t}+\underline{1})\cap\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$, 则 $\mathrm{D_H}(x^{(\alpha)}x^u)\in\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$. 故

$$\sum_{i=1}^{s}\sigma(i)(-1)^{\tau(i)\mathrm{d}(x^u)}x^{(\alpha-\varepsilon_i)}x^u\mathrm{D}_{i'}\in\mathrm{W}(m,n,\underline{t}).$$

所以 $x^{(\alpha-\varepsilon_i)}x^u\in\Lambda(m,n,\underline{t}),\forall i\in Y_0$. 因为 $\mathrm{D_H}(x^{(\alpha)}x^u)\in\mathrm{H}(m,n,\underline{t}+\underline{1})$, 故 $x^{(\alpha)}x^u\in\Lambda(m,n,\underline{t}+\underline{1})$. 这就迫使 $x^{(\alpha)}x^u\in\Lambda(m,n,\underline{t})$ 或者 $x^{(\alpha)}x^u=x^{(p^{t_i}\varepsilon_i)},i\in Y_0$. 所以

$$\mathrm{D_H}(x^{(\alpha)}x^u)\in\mathrm{H}(m,n,\underline{t})\oplus\mathbb{F}\mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E)\oplus\sum_{i=1}^{m}\mathbb{F}\mathrm{D_H}(x^{(p^{t_i}\varepsilon_i)}).$$

故 “$\subseteq$” 成立. 引理得证. □

命题 4.7 若 $t > 0$, 则 $\mathrm{Der}_t(\mathrm{H}) \subseteq \mathrm{ad}\,\widetilde{\mathrm{H}}_t$.

证明 因为 H 是 $\widetilde{\mathrm{H}}$ 的理想, 故 $\mathrm{ad}\,\widetilde{\mathrm{H}}_t \subseteq \mathrm{Der}_t(\mathrm{H})$. 设 $\phi \in \mathrm{Der}_t(\mathrm{H})$. 由命题 2.6 知, 存在 $y \in \mathrm{Nor}_\mathrm{W}(\mathrm{H})$ 使得 $\phi = \mathrm{ad}\,y|_\mathrm{H}$. 考察 $\mathbb{Z}$- 次数知 $y \in \mathrm{W}_t$. 设 $y = \sum_{j=1}^s g_j\mathrm{D}_j$. 由 $[\mathrm{D}_i, y] \in \mathrm{H}$, 可设 $[\mathrm{D}_i, y] = \mathrm{D_H}(f_i)$, 其中 $i \in Y$, $f_i \in \Lambda(m,n,\underline{t})$. 因为

$$\left[\mathrm{D}_i, \sum_{j=1}^s g_j\mathrm{D}_j\right] = \sum_{j=1}^s \sigma(j)(-1)^{\tau(j)\mathrm{d}(f_i)}\mathrm{D}_j(f_i)\mathrm{D}_{j'},$$

所以 $\mathrm{D}_i(g_{j'}) = \sigma(j)(-1)^{\tau(j)\mathrm{d}(f_i)}\mathrm{D}_j(f_i)$. 故

$$\mathrm{D}_j(f_i) = \sigma(j)(-1)^{\tau(j)\mathrm{d}(f_i)}\mathrm{D}_i(g_{j'}), \quad i,j \in Y. \tag{4.6}$$

由 $[\mathrm{D}_i, y] = \mathrm{D_H}(f_i)$ 以及 (1.3) 式知

$$[\mathrm{D}_j, [\mathrm{D}_i, y]] = [\mathrm{D}_j, \mathrm{D_H}(f_i)] = \mathrm{D_H}(\mathrm{D}_j(f_i)).$$

同理, 由 $[\mathrm{D}_j, y] = \mathrm{D_H}(f_j)$ 知, $[\mathrm{D}_i, [\mathrm{D}_j, y]] = \mathrm{D_H}(\mathrm{D}_i(f_j))$. 因为 $[\mathrm{D}_i, [\mathrm{D}_j, y]] = (-1)^{\tau(i)\tau(j)}[\mathrm{D}_j, [\mathrm{D}_i, y]]$, 所以 $\mathrm{D_H}(\mathrm{D}_i(f_j)) = (-1)^{\tau(i)\tau(j)}\mathrm{D_H}(\mathrm{D}_j(f_i))$. 由于 $\ker\mathrm{D_H} = \mathbb{F}$, 因此

$$\mathrm{D}_i(f_j) - (-1)^{\tau(i)\tau(j)}\mathrm{D}_j(f_i) \in \mathbb{F}, \quad \forall i,j \in Y. \tag{4.7}$$

将 (4.6) 式代入 (4.7) 式得

$$h := (-1)^{\tau(i)\mathrm{d}(f_j)}\sigma(i)\mathrm{D}_j(g_{i'}) - (-1)^{\tau(i)\tau(j)+\tau(j)\mathrm{d}(f_i)}\sigma(j)\mathrm{D}_i(g_{j'}) \in \mathbb{F}.$$

因为 $g_i \in \Lambda(m,n,\underline{t})_{t+1}, \forall i \in Y$, 并且 $t > 0$, 所以 $\mathrm{zd}(h) = t > 0$. 由于 $h \in \mathbb{F}$, 并且 $\mathbb{F}$ 中非零元的 $\mathbb{Z}$- 次数为零, 故 $h = 0$. 从而

$$(-1)^{\tau(i)\mathrm{d}(f_j)}\sigma(i)\mathrm{D}_j(g_{i'}) = (-1)^{\tau(i)\tau(j)+\tau(j)\mathrm{d}(f_i)}\sigma(j)\mathrm{D}_i(g_{j'}).$$

将 $\mathrm{d}(f_i) = \tau(i) + \mathrm{d}(y)$ 代入上式, 可得

$$\mathrm{D}_i(g_{j'}) = (-1)^{\tau(i)\tau(j)+(\tau(i)+\tau(j))\mathrm{d}(y)}\sigma(i)\sigma(j)\mathrm{D}_j(g_{i'}), \quad \forall i,j \in Y.$$

所以 $y \in \widetilde{\mathrm{H}}$. 因为 $y \in \mathrm{W}_t$, 所以 $y \in \widetilde{\mathrm{H}}_t$. □

引理 4.8 设 $h = \sum_{i=1}^s x_i\mathrm{D}_i$. 则对任意 $y \in \mathrm{W}_t$, 均有 $[h, y] = ty$.

证明 设 $x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j \in \mathrm{W}_t$, 则 $|\alpha| + |u| = t + 1$. 若 $i \in Y_0$, 则

$$[x_i\mathrm{D}_i, x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j] = (\alpha_i - \delta_{ij})x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j.$$

若 $i \in \{u\}$, 则 $[x_i\mathrm{D}_i, x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j] = (1 - \delta_{ij})x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j$. 若 $i \in Y_1\backslash\{u\}$, 则 $[x_i\mathrm{D}_i, x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j] = -\delta_{ij}x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j$. 于是

$$[h, x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j] = \left[\sum_{i=1}^s x_i\mathrm{D}_i, x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{s}[x_i\mathrm{D}_i, x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j] \\
&= (\alpha_1+\cdots+\alpha_m+|u|-1)x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j \\
&= (|\alpha|+|u|-1)x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j \\
&= tx^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j.
\end{aligned}
$$

因为 W_t 中任一元素 y 都是 $\{x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j \mid |\alpha|+|u|=t+1, j\in Y\}$ 中元素的 $\mathbb{F}$- 线性组合, 从而可知 $[h,y]=ty$. □

对任意 $y\in L_t$, 其中 $L=\mathrm{W},\mathrm{S}$ 或 H, 因为 $L_t\subseteq \mathrm{W}_t$, 所以 $y\in\mathrm{W}_t$. 由引理 4.8, $[h,y]=ty\in L_t$. 我们称 $\mathrm{ad}\,h$ 为 L 的次数导子.

引理 4.9 设 $y=\sum_{i,j=1}^{s}a_{ij}x_i\mathrm{D}_j\in \mathrm{Nor_W(H)}$, 其中 $a_{ij}\in\mathbb{F}$.

1) 若 $\mathrm{d}(y)=\overline{0}$, 则

$$
\begin{aligned}
&a_{i'j'}=-\sigma(i)\sigma(j)a_{ji}, \quad i,j\in Y, \quad i\neq j,\\
&a_{ii}=a_{jj}, \quad i,j\in Y_1.
\end{aligned}
$$

2) 若 $\mathrm{d}(y)=\overline{1}$, 则

$$a_{i'j}=\sigma(i)a_{ji}, \quad i\in Y_0, \quad j\in Y.$$

证明 显然 y 也可表为 $\sum_{k,l=1}^{s}a_{kl}x_k\mathrm{D}_l$. 因为 $y\in\mathrm{Nor_W(H)}$, 所以 $[y,\mathrm{H}]\subseteq\mathrm{H}\subseteq\widetilde{\mathrm{H}}$.

1) 设 $\mathrm{d}(y)=\overline{0}$. 任取 $i\in Y_0$, 则

$$
\begin{aligned}
[y,\mathrm{D_H}(x^{(2\varepsilon_i)})] &= \left[\sum_{k,l=1}^{s}a_{kl}x_k\mathrm{D}_l, \sigma(i)x_i\mathrm{D}_{i'}\right] \\
&= \left(\sum_{k=1}^{s}\sigma(i)a_{ki}x_k\right)\mathrm{D}_{i'}-\sum_{l=1}^{s}\sigma(i)a_{i'l}x_i\mathrm{D}_l\in\widetilde{\mathrm{H}}.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

设 $j\in Y\backslash\{i\}$. 因为 $\widetilde{\mathrm{H}}$ 的元素满足 (4.1) 式, 故有

$$\mathrm{D}_i(-\sigma(i)a_{i'j'}x_i)=\sigma(i)\sigma(j)\mathrm{D}_j\left(\sum_{k=1}^{s}\sigma(i)a_{ki}x_k-\sigma(i)a_{i'i'}x_i\right).$$

从而推得

$$a_{ji}=-\sigma(i)\sigma(j)a_{i'j'}, \quad i\in Y_0, \quad j\in Y\backslash\{i\}.$$

设 $i,j\in Y_1$, $i\neq j$. 则

$$
\begin{aligned}
[y,\mathrm{D_H}(x_ix_j)] &= \left[\sum_{k,l=1}^{s}a_{kl}x_k\mathrm{D}_l, x_j\mathrm{D}_i-x_i\mathrm{D}_j\right] \\
&= \left(\sum_{k=1}^{s}a_{kj}x_k\right)\mathrm{D}_i-\left(\sum_{k=1}^{s}a_{ki}x_k\right)\mathrm{D}_j
\end{aligned}
$$

$$-\sum_{l=1}^{s} a_{il}x_j\mathrm{D}_l + \sum_{l=1}^{s} a_{jl}x_i\mathrm{D}_l \in \widetilde{\mathrm{H}}. \tag{4.9}$$

由 (4.1) 式, 同理有

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}_i\left(-\sum_{k=1}^{s} a_{ki}x_k - a_{ij}x_j + a_{jj}x_i\right)\\ &= (-1)^{\tau(i)\tau(j)}\mathrm{D}_j\left(\sum_{k=1}^{s} a_{kj}x_k - a_{ii}x_j + a_{ji}x_i\right).\end{aligned}$$

于是可推得

$$a_{ii} = a_{jj}, \quad i,j \in Y_1, \quad i \neq j.$$

由 (4.1) 式可知, $\mathrm{D}_i(f_i) = 0, i \in Y_1$. 在 (4.9) 式中, $f_i = \sum_{k=1}^{s} a_{kj}x_k - a_{ii}x_j + a_{ji}x_i$. 由 $\mathrm{D}_i(f_i) = 0$ 可得 $a_{ij} = -a_{ji}$, 即

$$a_{i'j'} = -\sigma(i)\sigma(j)a_{ji}, \quad i,j \in Y_1, \quad i \neq j.$$

2) 设 $\mathrm{d}(y) = \bar{1}$, 即 $\mathrm{d}(\sum_{k,l=1}^{s} a_{kl}x_k\mathrm{D}_l) = \bar{1}$. 对 $i \in Y_0$ 与 $j \in Y_1$, (4.8) 式仍然成立. 由 (4.1) 式可知

$$\mathrm{D}_i(-\sigma(i)a_{i'j}x_i) = -\sigma(i)\mathrm{D}_j\left(\sum_{k=1}^{s} \sigma(i)a_{ki}x_k - \sigma(i)a_{i'j}x_i\right).$$

于是可知

$$a_{i'j} = \sigma(i)a_{ji}, \quad i \in Y_0, \quad j \in Y_1. \qquad \square$$

引理 4.10 设 $y = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}x_i\mathrm{D}_i + \sum_{i=m+1}^{s} ax_i\mathrm{D}_i \in \mathrm{Nor}_{\mathrm{W}}(\mathrm{H})$, 其中 $a_{ii}, a \in \mathbb{F}$. 则存在 $z \in \mathrm{H}_0$, 使得 $y - z = ah$, 这里 $h = \sum_{i=1}^{s} x_i\mathrm{D}_i$.

证明 设 $b_i = a_{ii} - a$, $i = 1, \cdots, m$. 则

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^{m} a_{ii}x_i\mathrm{D}_i + \sum_{i=m+1}^{s} ax_i\mathrm{D}_i \\ &= \sum_{i=1}^{s} ax_i\mathrm{D}_i + \sum_{i=1}^{m} b_ix_i\mathrm{D}_i \\ &= ah + \sum_{i=1}^{m} b_ix_i\mathrm{D}_i \\ &= ah + \sum_{i=1}^{r}(-b_{i'})(x_i\mathrm{D}_i - x_{i'}\mathrm{D}_{i'}) + \sum_{i=1}^{r}(b_{i'} + b_i)x_i\mathrm{D}_i. \end{aligned}$$

设 $z = \sum_{i=1}^{r}(-b_{i'})(x_i\mathrm{D}_i - x_{i'}\mathrm{D}_{i'})$. 则

$$z = \sum_{i=1}^{r}(-b_{i'})\sigma(i')\mathrm{D}_{\mathrm{H}}(x_ix_{i'}) \in \mathrm{H}_0.$$

设 $c_i = b_{i'} + b_i$. 则 $y = ah + \sum_{i=1}^{r} c_i x_i \mathrm{D}_i + z$. 因为 $y, z \in \mathrm{Nor_W(H)}$, 由引理 4.8, $ah \in \mathrm{Nor_W(H)}$, 所以 $\sum_{i=1}^{r} c_i x_i \mathrm{D}_i \in \mathrm{Nor_W(H)}$. 因此

$$\left[\sum_{i=1}^{r} c_i x_i \mathrm{D}_i, \mathrm{D_H}(x_l x_k)\right] \in \mathrm{H} \subseteq \widetilde{\mathrm{H}},$$

其中 $1 \leq l < k \leq r$. 直接计算知

$$\left[\sum_{i=1}^{r} c_i x_i \mathrm{D}_i, \mathrm{D_H}(x_l x_k)\right] = c_k x_k \mathrm{D}_{l'} + c_l x_l \mathrm{D}_{k'} \in \widetilde{\mathrm{H}}.$$

由 (4.1) 式知

$$\mathrm{D}_k(c_k x_k) = \sigma(k)\sigma(l)\mathrm{D}_l(c_l x_l).$$

于是可得 $c_k = c_l$. 所以 $c_1 = c_2 = \cdots = c_r$. 令 $c = c_1$, 则

$$y = \sum_{i=1}^{r}(a+c)x_i \mathrm{D}_i + \sum_{i=r+1}^{s} a x_i \mathrm{D}_i + z,$$

并且

$$\sum_{i=1}^{r}(a+c)x_i \mathrm{D}_i + \sum_{i=r+1}^{s} a x_i \mathrm{D}_i \in \mathrm{Nor_W(H)}.$$

所以

$$\left[\sum_{i=1}^{r}(a+c)x_i \mathrm{D}_i + \sum_{i=r+1}^{s} a_i \mathrm{D}_i, \mathrm{D_H}(x_1 x_s)\right] = -c x_1 \mathrm{D}_s \in \mathrm{H} \subseteq \widetilde{\mathrm{H}}.$$

由 (4.1) 式知 $c = 0$. 于是 $y = ah + z$, 即 $y - z = ah$. □

命题 4.11 $\mathrm{Der}_0(\mathrm{H}) = \mathrm{ad}(\widetilde{\mathrm{H}}_0 + \mathbb{F}h)$, 其中 $h = \sum_{i=1}^{s} x_i \mathrm{D}_i$.

证明 由引理 3.6 与引理 4.8 知, $\mathrm{ad}(\widetilde{\mathrm{H}}_0 + \mathbb{F}h) \subseteq \mathrm{Der}_0(\mathrm{H})$. 反之, 设 $\phi \in \mathrm{Der}_0(\mathrm{H})$. 由命题 2.6 知, 存在 $y \in \mathrm{Nor_W(H)}$ 使得 $\phi = \mathrm{ad}\, y|_{\mathrm{H}}$. 因为 $\mathrm{zd}(\phi) = 0$, 所以 $y \in \mathrm{W}_0$. 于是可设 $y = \sum_{i,j=1}^{s} a_{ij} x_i \mathrm{D}_j$, 其中 $a_{ij} \in \mathbb{F}$. 易见

$$y = \sum_{i=1}^{s} a_{ii} x_i \mathrm{D}_i + 2^{-1} \sum_{1 \leq i \neq j \leq s} (a_{ij} x_i \mathrm{D}_j + a_{j'i'} x_{j'} \mathrm{D}_{i'}).$$

由引理 4.9 的 1) 知, 当 $1 \leq i, j \leq m$ 或者 $m < i, j \leq s$ 时, $a_{j'i'} = -\sigma(i)\sigma(j)a_{ij}$. 所以

$$\begin{aligned} a_{ij} x_i \mathrm{D}_j + a_{j'i'} x_{j'} \mathrm{D}_{i'} &= a_{ij}(x_i \mathrm{D}_j - \sigma(i)\sigma(j) x_{j'} \mathrm{D}_{i'}) \\ &= a_{ij}\sigma(j')\mathrm{D_H}(x_{j'} x_i) \in \mathrm{H}_0 \subseteq \widetilde{\mathrm{H}}_0. \end{aligned}$$

由引理 4.9 的 2) 知, 当 $i \in Y_0, j \in Y_1$ 时, $a_{ji'} = \sigma(i) a_{ij}$. 故

$$\begin{aligned} a_{ij} x_i \mathrm{D}_j + a_{j'i'} x_{j'} \mathrm{D}_{i'} &= a_{ij} x_i \mathrm{D}_j + a_{ji'} x_j \mathrm{D}_{i'} \\ &= a_{ij}(x_i \mathrm{D}_j + \sigma(i) x_j \mathrm{D}_{i'}) = a_{ij} \mathrm{D_H}(x_i x_j) \in \mathrm{H}_0 \subseteq \widetilde{\mathrm{H}}_0. \end{aligned}$$

同理当 $i \in Y_1, j \in Y_0$ 时,

$$a_{ij}x_i\mathrm{D}_j + a_{j'i'}x_{j'}\mathrm{D}_{i'} \in \mathrm{H}_0 \subseteq \widetilde{\mathrm{H}}_0.$$

于是我们证明了

$$\eta := 2^{-1} \sum_{1\le i\ne j\le s} (a_{ij}x_i\mathrm{D}_j - a_{j'i'}x_{j'}\mathrm{D}_{i'}) \in \widetilde{\mathrm{H}}_0.$$

因为 $\eta \in \widetilde{\mathrm{H}} \subseteq \mathrm{Nor}_{\mathrm{W}}(\mathrm{H})$, $y \in \mathrm{Nor}_{\mathrm{W}}(\mathrm{H})$, 所以

$$\sum_{i=1}^{s} a_{ii}x_i\mathrm{D}_i = y - \eta \in \mathrm{Nor}_{\mathrm{W}}(\mathrm{H}).$$

由引理 4.9 的 1) 知, $a_{ii} = a_{jj}$, $i, j \in Y_1$. 所以

$$\sum_{i=1}^{s} a_{ii}x_i\mathrm{D}_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}x_i\mathrm{D}_i + \sum_{i=m+1}^{s} ax_i\mathrm{D}_i.$$

由引理 4.10 知, 存在 $z \in \mathrm{H}_0 \subseteq \widetilde{\mathrm{H}}_0$ 使得

$$\sum_{i=1}^{s} a_{ii}x_i\mathrm{D}_i - z = ah,$$

故 $\sum_{i=1}^{s} a_{ii}x_i\mathrm{D}_i = z + ah$. 于是

$$y = z + ah + \eta = (z + \eta) + ah \in \widetilde{\mathrm{H}}_0 + \mathbb{F}h.$$

所以 $\phi = \mathrm{ad}\, y|_{\mathrm{H}} \in \mathrm{ad}\,(\widetilde{\mathrm{H}} + \mathbb{F}h)$. 因此 $\mathrm{Der}_0(\mathrm{H}) = \mathrm{ad}\,(\widetilde{\mathrm{H}} + \mathbb{F}h)$. □

引理 4.12 设 $\phi \in \mathrm{Der}_{-1}(\mathrm{H})$. 若 $i, j \in Y_0$, 则

$$\phi(\mathrm{D_H}(x_ix_j)) = a_i\mathrm{D}_i + a_{i'}\mathrm{D}_{i'} + a_j\mathrm{D}_j + a_{j'}\mathrm{D}_{j'},$$

其中 $a_i, a_{i'}, a_j, a_{j'} \in \mathbb{F}$. 若 $i \in Y_0$, $j \in Y_1$, 则

$$\phi(\mathrm{D_H}(x_ix_j)) = a_i\mathrm{D}_i + a_{i'}\mathrm{D}_{i'} + a_j\mathrm{D}_j,$$

其中 $a_i, a_{i'}, a_j \in \mathbb{F}$.

证明 我们仅证 $i, j \in Y_0$ 的情形. 对 $i \in Y_0$, $j \in Y_1$ 的情形, 证明是相仿的. 由 $n > 1$ 知 $\{i, j, i', j'\} \ne Y$, 并且 $|\{i, j, i', j'\}| \le s - 2$. 因为 $\phi(\mathrm{D_H}(x_ix_j)) \in \mathrm{H}_{-1}$, 故可设 $\phi(\mathrm{D_H}(x_ix_j)) = \sum_{h=1}^{s} a_h\mathrm{D}_h$, 其中 $a_h \in \mathbb{F}$.

任取 $k, l \in Y\backslash\{i, j, i', j'\}$, 并且 $k \ne l$. 可设

$$\phi(\mathrm{D_H}(x_kx_l)) = \sum_{t=1}^{s} b_t\mathrm{D}_t,$$

其中 $b_t \in \mathbb{F}$. 将 ϕ 作用于等式

$$[\mathrm{D_H}(x_ix_j), \mathrm{D_H}(x_kx_l)] = 0,$$

则有

$$\left[\sum_{i=1}^{s} a_h \mathrm{D}_h, \mathrm{D_H}(x_k x_l)\right] + (-1)^{\mathrm{d}(\phi)(\tau(i)+\tau(j))}\left[\mathrm{D_H}(x_i x_j), \sum_{t=1}^{s} b_t \mathrm{D}_t\right] = 0.$$

于是可推得 $\lambda_1 a_l \mathrm{D}_{k'} + \lambda_2 a_k \mathrm{D}_{l'} + \lambda_3 b_j \mathrm{D}_{i'} + \lambda_4 b_i \mathrm{D}_{j'} = 0$, 其中 $\lambda_i = 1$ 或 -1, $i = 1,2,3,4$. 于是 $\lambda_1 a_l = \lambda_2 a_k = 0$. 故 $a_l = a_k = 0$. 所以

$$\phi(\mathrm{D_H}(x_i x_j)) = a_i \mathrm{D}_i + a_{i'} \mathrm{D}_{i'} + a_j \mathrm{D}_j + a_{j'} \mathrm{D}_{j'}. \qquad \square$$

引理 4.13 设 $\phi \in \mathrm{Der}_{-1}(\mathrm{H})$, 并且 $\mathrm{d}(\phi) = \bar{0}$. 则存在 $a_1, a_2, \cdots, a_m \in \mathbb{F}$, 使得

1) $\phi(\mathrm{D_H}(x^{(2\varepsilon_i)}) = a_{i'} \mathrm{D}_{i'}$, $i \in Y_0$,

2) $\phi(\mathrm{D_H}(x_k x_i)) = \sigma(i') a_{i'} \mathrm{D}_k$, $i \in Y_0, k \in Y_1$,

3) $\phi = \sum_{j=1}^{m} \sigma(j) a_{j'} (\,\mathrm{ad}\, \mathrm{D}_j)$.

证明 1) 由引理 4.12 知, 存在 $a_1, \cdots, a_m, c_1, \cdots, c_m \in \mathbb{F}$, 使得

$$\phi(\mathrm{D_H}(x^{(2\varepsilon_i)})) = 2^{-1}\phi(\mathrm{D_H}(x_i x_i)) = c_i \mathrm{D}_i + a_{i'} \mathrm{D}_{i'},$$

其中 $i = 1, 2, \cdots, m$. 设 $k \in Y_1$. 由引理 4.12 知,

$$\phi(\mathrm{D_H}(x_k x_i)) = b_i \mathrm{D}_i + b_{i'} \mathrm{D}_{i'} + b_k \mathrm{D}_k,$$

其中 $b_i, b_{i'}, b_k \in \mathbb{F}$. 因为 $\mathrm{d}(\phi) = \bar{0}$, 所以 $\phi(\mathrm{D_H}(x_k x_i)) \in \mathrm{H}_{\bar{1}}$. 故 $b_i = b_{i'} = 0$. 于是

$$\phi(\mathrm{D_H}(x_k x_i)) = b_k \mathrm{D}_k. \tag{4.10}$$

将 ϕ 作用于等式

$$[\mathrm{D_H}(x^{(2\varepsilon_i)}), \mathrm{D_H}(x_k x_i)] = 0$$

可得

$$[c_i \mathrm{D}_i + a_{i'} \mathrm{D}_{i'}, -x_i \mathrm{D}_k + \sigma(i) x_k \mathrm{D}_i] + [\sigma(i) x_i \mathrm{D}_{i'}, b_k \mathrm{D}_k] = 0.$$

从而可推得 $-c_i \mathrm{D}_k = 0$. 所以 $c_i = 0$. 故

$$\phi(\mathrm{D_H}(x^{(2\varepsilon_i)}) = a_{i'} \mathrm{D}_{i'}, \quad a_{i'} \in \mathbb{F}, \quad i \in Y_0.$$

2) 由 1) 知 $\phi(\mathrm{D_H}(x^{(2\varepsilon_{i'})})) = a_i \mathrm{D}_i$, $i \in Y_0$. 将 ϕ 作用于等式

$$\mathrm{D_H}(x_i x_{i'}) = \sigma(i)[\mathrm{D_H}(x^{(2\varepsilon_i)}), \mathrm{D_H}(x^{(2\varepsilon_{i'})})],$$

可推得

$$\phi(\mathrm{D_H}(x_i x_{i'})) = -a_i \mathrm{D}_{i'} - a_{i'} \mathrm{D}_i, \quad i \in Y_0. \tag{4.11}$$

将 ϕ 作用于等式

$$[\mathrm{D_H}(x_i x_{i'}), \mathrm{D_H}(x_k x_i)] = \sigma(i') \mathrm{D_H}(x_k x_i),$$

利用 (4.11) 与 (4.10) 式可得:

$$[-a_i \mathrm{D}_{i'} - a_{i'}\mathrm{D}_i, -x_i\mathrm{D}_k + \sigma(i)x_k\mathrm{D}_i] + [\sigma(i)x_i\mathrm{D}_{i'} + \sigma(i')x_i\mathrm{D}_i, b_k\mathrm{D}_k] = \sigma(i')b_k\mathrm{D}_k.$$

于是 $a_{i'}\mathrm{D}_k = \sigma(i')b_k\mathrm{D}_k$. 所以 $b_k = \sigma(i')a_{i'}$. 因而有

$$\phi(\mathrm{D_H}(x_kx_i)) = \sigma(i')a_{i'}\mathrm{D}_k, \quad i \in Y_0, \quad k \in Y_1.$$

3) 令 $\psi = \phi - \sum_{j=1}^m \sigma(j)a_{j'}(\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_j)$. 由 1) 知

$$\begin{aligned}\psi(\mathrm{D_H}(x^{(2\varepsilon_i)})) &= \phi(\mathrm{D_H}(x^{(2\varepsilon_i)})) - \sum_{j=1}^m \sigma(j)a_{j'}\,\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_j(\mathrm{D_H}(x^{(2\varepsilon_j)}))\\ &= a_{i'}\mathrm{D}_{i'} - \sigma(i)a_{i'}\mathrm{D_H}(x_i) = 0, \quad i \in Y_0.\end{aligned}$$

由 2) 知

$$\begin{aligned}\psi(\mathrm{D_H}(x_kx_i)) &= \phi(\mathrm{D_H}(x_kx_i)) - \sum_{j=1}^m \sigma(j)a_{j'}\,\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_j(\mathrm{D_H}(x_kx_i))\\ &= \sigma(i')a_{i'}\mathrm{D}_k - \sigma(i)a_{i'}\mathrm{D_H}(x_k) = 0, \quad k \in Y_1, \quad i \in Y_0.\end{aligned}$$

因为

$$\mathrm{D_H}(x_ix_j) = -[\mathrm{D_H}(x_kx_i), \mathrm{D_H}(x_kx_j)], \quad i,j \in Y_0, \quad k \in Y_1,$$

$$\mathrm{D_H}(x_kx_l) = \sigma(i)[\mathrm{D_H}(x_kx_i), \mathrm{D_H}(x_kx_{i'})], \quad k,l \in Y_1, \quad i \in Y_0,$$

所以 $\{\mathrm{D_H}(x^{(2\varepsilon_i)}), \mathrm{D_H}(x_kx_i) \mid i\in Y_0, k\in Y_1\}$ 生成子代数 H_0. 故 $\psi(\mathrm{H}_0) = 0$. 显然 $\psi(\mathrm{H}_{-1}) = 0$. 由引理 2.8 知 $\psi = 0$. 故 $\phi = \sum_{i=1}^m \sigma(j)a_{j'}(\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_j)$. □

引理 4.14　*设* $\phi \in \ker_{-1}(\mathrm{H})$, *并且* $\mathrm{d}(\phi) = \overline{1}$.

1) *对任意* $k \in Y_1$, *存在* $a_k \in \mathbb{F}$, *使得*

$$\phi(\mathrm{D_H}(x_kx_i)) = \sigma(i)a_k\mathrm{D}_{i'}, \quad i \in Y_0.$$

2) $\phi = \sum_{j=m+1}^s a_j(\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_j)$.

证明　1) 因为 $\mathrm{d}(\phi) = \overline{1}$, 所以 $\phi(\mathrm{D_H}(x_ix_j)) \in \mathrm{H}_{\overline{1}}$, 其中 $i,j \in Y_0$. 由引理 4.12 知 $\phi(\mathrm{D_H}(x_ix_j)) \in \mathrm{H}_{\overline{0}}$, 所以 $\phi(\mathrm{D_H}(x_ix_j)) = 0$, $i,j \in Y_0$. 特别地

$$\phi(\mathrm{D_H}(x_ix_{i'})) = 0,$$

$$\phi(\mathrm{D_H}(x^{(2\varepsilon_i)})) = 2^{-1}\phi(\mathrm{D_H}(x_ix_i)) = 0,$$

其中 $i \in Y_0$. 由引理 4.12 知

$$\phi(\mathrm{D_H}(x_kx_i)) = b_i\mathrm{D}_i + b_{i'}\mathrm{D}_{i'} + b_k\mathrm{D}_k, \quad k \in Y_1, \quad i \in Y_0.$$

因为 $\mathrm{d}(\phi)=\bar{1}$, 所以 $b_k=0$. 故 $\phi(\mathrm{D_H}(x_kx_i))=b_i\mathrm{D}_i+b_{i'}\mathrm{D}_{i'}$. 同理可设 $\phi(\mathrm{D_H}(x_kx_{i'}))=c_i\mathrm{D}_i+c_{i'}\mathrm{D}_{i'}$, 其中 $c_i,c_{i'}\in\mathbb{F}$. 将 ϕ 作用于等式

$$[\mathrm{D_H}(x_kx_i),\mathrm{D_H}(x_kx_{i'})]=-\mathrm{D_H}(x_ix_{i'}),\quad k\in Y_1,\quad i\in Y_0,$$

则有

$$\begin{aligned}&[b_i\mathrm{D}_i+b_{i'}\mathrm{D}_{i'},-x_{i'}\mathrm{D}_k+\sigma(i')x_k\mathrm{D}_i]\\&+(-1)^{\mathrm{d}(\phi)}[\sigma(i)x_k\mathrm{D}_{i'}-x_i\mathrm{D}_k,c_i\mathrm{D}_i+c_{i'}\mathrm{D}_{i'}]=0.\end{aligned}$$

于是可得 $-b_{i'}\mathrm{D}_k-c_i\mathrm{D}_k=0$, 所以 $c_i=-b_{i'}$. 因此

$$\phi(\mathrm{D_H}(x_kx_{i'}))=-b_{i'}\mathrm{D}_i+c_{i'}\mathrm{D}_{i'},\quad k\in Y_1,\quad i\in Y_0.$$

将 ϕ 作用于等式

$$[\mathrm{D_H}(x^{(2\varepsilon_i)}),\mathrm{D_H}(x_kx_{i'})]=\sigma(i)\mathrm{D_H}(x_kx_i),\quad k\in Y_1,\quad i\in Y_0,$$

则有

$$[\sigma(i)x_i\mathrm{D}_{i'},-b_{i'}\mathrm{D}_i+c_{i'}\mathrm{D}_{i'}]=\sigma(i)(b_i\mathrm{D}_i+b_{i'}\mathrm{D}_{i'}).$$

于是 $\sigma(i)b_{i'}\mathrm{D}_{i'}=\sigma(i)b_i\mathrm{D}_i+\sigma(i)b_{i'}\mathrm{D}_{i'}$. 所以 $\sigma(i)b_i\mathrm{D}_i=0$; 随之, $b_i=0$. 因此 $\phi(\mathrm{D_H}(x_kx_i))=b_{i'}\mathrm{D}_{i'}$. 令 $a_k=\sigma(i)b_{i'}$, 则

$$\phi(\mathrm{D_H}(x_kx_i))=\sigma(i)a_k\mathrm{D}_{i'},\quad k\in Y_1,\quad i\in Y_0.$$

2) 令 $\psi=\phi-\sum_{j=m+1}^{s}a_j(\operatorname{ad}\mathrm{D}_j)$, 则由 1) 知

$$\begin{aligned}\psi(\mathrm{D_H}(x^{(2\varepsilon_i)}))&=\phi(\mathrm{D_H}(x^{(2\varepsilon_i)}))-\sum_{j=m+1}^{s}a_j(\operatorname{ad}\mathrm{D}_j)(\mathrm{D_H}(x^{(2\varepsilon_i)}))\\&=0,\\\psi(\mathrm{D_H}(x_kx_i))&=\phi(\mathrm{D_H}(x_kx_i))-\sum_{j=m+1}^{s}a_j(\operatorname{ad}\mathrm{D}_j)(\mathrm{D_H}(x_kx_i))\\&=\sigma(i)a_k\mathrm{D}_{i'}-a_k\mathrm{D_H}(x_i)\\&=0.\end{aligned}$$

因为 $\{\mathrm{D_H}(x^{(2\varepsilon_i)}),\mathrm{D_H}(x_kx_i)\mid i\in Y_0,k\in Y_1\}$ 生成 H_0(见引理 4.13 的证明), 所以 $\psi(\mathrm{H}_0)=0$. 显然 $\psi(\mathrm{H}_{-1})=0$. 由引理 2.8 知 $\psi=0$. 这就证明了 $\phi=\sum_{j=m+1}^{s}a_j(\operatorname{ad}\mathrm{D}_j)$. □

命题 4.15 $\mathrm{Der}_{-1}(\mathrm{H})=\operatorname{ad}\widetilde{\mathrm{H}}_{-1}$.

证明 因为 $\widetilde{\mathrm{H}}\supseteq\mathrm{H}_{-1}=\mathrm{W}_{-1}$, 所以 $\widetilde{\mathrm{H}}_{-1}=\mathrm{H}_{-1}=\mathrm{W}_{-1}=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D}_i\mid i\in Y\}$. 设 $\phi\in\mathrm{Der}_{-1}(\mathrm{H})$. 显然 $\phi=\phi_0+\phi_1$, 其中 $\phi_0,\phi_1\in\mathrm{Der}_{-1}(\mathrm{H})$, 并且 $\mathrm{d}(\phi_0)=\bar{0},\mathrm{d}(\phi_1)=\bar{1}$. 由引理 4.13 的 3) 与 4.14 的 2) 知, $\phi_0,\phi_1\in\operatorname{ad}\widetilde{\mathrm{H}}_{-1}$. 所以 $\phi\in\operatorname{ad}\widetilde{\mathrm{H}}_{-1}$. 于是 $\mathrm{Der}_{-1}(\mathrm{H})\subseteq\operatorname{ad}\widetilde{\mathrm{H}}_{-1}$. 因此 $\mathrm{Der}_{-1}(\mathrm{H})=\operatorname{ad}\widetilde{\mathrm{H}}_{-1}$. □

引理 4.16 设 $T = \{\mathrm{D_H}(x^{(k\varepsilon_i)}) \mid 1 \le k \le \pi_i, i \in Y_0\} \cup \mathrm{H}_0$, 则 T 生成 H.

证明 设 Q 是 T 生成的 H 的子代数. 任取 $\mathrm{D_H}(x^{(\alpha)}x^u) \in \mathrm{H}$. 设 $t = |\alpha| + |u|$. 我们对 t 用归纳法证明 $\mathrm{D_H}(x^{(\alpha)}x^u) \in Q$.

由已知 $\mathrm{D_H}(x_i) \in Q$, $\forall i \in Y_0$. 因为 $\mathrm{D_H}(x_j x_{i'}) \in \mathrm{H}_0 \subseteq Q$, 所以 $\mathrm{D_H}(x_j) = \sigma(i)[\mathrm{D_H}(x_i), \mathrm{D_H}(x_j x_{i'})] \in Q$, $\forall j \in Y_1$. 于是当 $t=1$ 时结论成立. 由 $\mathrm{H}_0 \subseteq T$ 知, $t=2$ 时结论也成立. 令 $t \ge 3$.

假设 $\mathrm{D_H}(x^{(\beta)}x^v) \in Q$, 其中 $|\beta| + |v| < t$. 设 $|\alpha| + |u| = t$, 往证 $\mathrm{D_H}(x^{(\alpha)}x^u) \in Q$. 对于 $i \in Y_0, j \in Y_1$, 我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{D_H}(x^{(2\varepsilon_i)}x_j) &= \sigma(i)[\mathrm{D_H}(x^{(3\varepsilon_i)}), \mathrm{D_H}(x_{i'}x_j)] \in Q,\\ \mathrm{D_H}(x_i x_k x_j) &= -(-1)^{\tau(k)}\sigma(i)[\mathrm{D_H}(x^{(2\varepsilon_i)}x_j), \mathrm{D_H}(x_{i'}x_k)] \in Q,\end{aligned} \tag{4.12}$$

其中 $k \in Y$.

$$\mathrm{D_H}(x_k x_j x_l) = \sigma(i)[\mathrm{D_H}(x_i x_k x_j), \mathrm{D_H}(x_l x_{i'})] \in Q, \tag{4.13}$$

其中 $k, j, l \in Y_1$.

$$\mathrm{D_H}(x^{(k_i\varepsilon_i)}x_j) = \sigma(i')[\mathrm{D_H}(x_{i'}x_j), \mathrm{D_H}(x^{(k_i\varepsilon_i+\varepsilon_i)})] \in Q, \tag{4.14}$$

其中 $k_i < \pi_i$.

我们分三种情形证明 $\mathrm{D_H}(x^{(\alpha)}x^u) \in Q$.

(i) $|u| = n$. 由李超代数 H 的定义知 $(\alpha, u) \ne (\pi, E)$, 所以 $\alpha \ne \pi$. 可设 $\alpha_i < \pi_i$. 由归纳假设与 (4.12) 式知

$$\begin{aligned}\mathrm{D_H}(x^{(\alpha)}x^u) &= \mathrm{D_H}(x^{(\alpha)}x^E)\\ &= \sigma(i)[\mathrm{D_H}(x^{(\alpha+\varepsilon_i)})x_{m+1}\cdots x_{s-2}), \mathrm{D_H}(x_{i'}x_{s-1}x_s)] \in Q.\end{aligned}$$

(ii) $2 \le |u| < n$. 则存在 $k \in Y_1$, 使得 $x_k x^u \ne 0$. 可设 $x^u = x_{i_1}\cdots x_{i_k}$. 由归纳假设与 (4.13) 式知

$$\mathrm{D_H}(x^{(\alpha)}x^u) = -(-1)^{|u|}[\mathrm{D_H}(x^{(\alpha)}x_k x_{i_1}\cdots x_{i_{t-2}}), \mathrm{D_H}(x_k x_{i_{t-1}} x_{i_t})] \in Q.$$

(iii) $|u| \le 1$. 由 $t > 2$ 知 $|\alpha| \ge 2$. 若存在 $i \in Y_0$, 使得 $\alpha_i \ge 2$, 由归纳假设与 (4.14) 式知

$$\mathrm{D_H}(x^{(\alpha)}x^u) = -(-1)^{|u|}[\mathrm{D_H}(x^{(\alpha-\alpha_i\varepsilon_i)}x_j x^u), \mathrm{D_H}(x^{(\alpha_i\varepsilon_i)}x_j)] \in Q,$$

其中 $j \in Y_1$. 若对任意 $i \in Y_0$, 均有 $\alpha_i = 1$. 由于 $\alpha \ge 2$, 可设 $\alpha_i = \alpha_k = 1$. 由归纳假设与 (4.12) 式知

$$\mathrm{D_H}(x^{(\alpha)}x^u) = -(-1)^{|u|}[\mathrm{D_H}(x^{(\alpha-\varepsilon_i-\varepsilon_k)}x_j x^u), \mathrm{D_H}(x_i x_k x_j)] \in Q.$$

归纳法完成. 于是证明了 $\mathrm{H} \subseteq Q$, 故 $Q = \mathrm{H}$. □

引理 4.17 设 $\phi \in \mathrm{Der}_{-t}(\mathrm{H})$, 其中 $t > 1$. 如果 $\phi(\mathrm{D_H}(x^{((t+1)\varepsilon_i)})) = 0$, $\forall i \in Y_0$, 则 $\phi = 0$.

证明 若 $k \le t$, 由于

$$\mathrm{zd}(\phi(\mathrm{D_H}(x^{(k\varepsilon_i)}))) \le -t + k - 2 \le -2,$$

故 $\phi(\mathrm{D_H}(x^{(k\varepsilon_i)})) = 0$, $\forall i \in Y_0$. 设 $k \ge t+1$. 我们对 k 用归纳法证明 $\phi(\mathrm{D_H}(x^{(k\varepsilon_i)})) = 0$. 由已知, 当 $k = t+1$ 时结论成立. 令 $k > t+1$, 假设 $\phi(\mathrm{D_H}(x^{((k-1)\varepsilon_i)})) = 0$. 因为

$$[\mathrm{D}_j, \mathrm{D_H}(x^{(k\varepsilon_i)})] = \delta_{ij}\mathrm{D_H}(x^{((k-1)\varepsilon_i)}), \quad \forall j \in Y,$$

所以, 由引理 2.7 知 $\phi(\mathrm{D_H}(x^{(k\varepsilon_i)})) \in \mathrm{H}_{-1}$. 于是

$$\phi(\mathrm{D_H}(x^{(k\varepsilon_i)})) \in \mathrm{H}_{-t+k-2} \cap \mathrm{H}_{-1} = 0.$$

归纳法完成. 从而对任意 $k \ge 1$, 有 $\phi(\mathrm{D_H}(x^{(k\varepsilon_i)})) = 0$, $\forall i \in Y_0$. 由于 $\mathrm{zd}(\phi) = -t < -1$, 故 $\phi(\mathrm{H}_0) = 0$. 由引理 4.16 知 $\phi = 0$. □

命题 4.18 设 $t > 1$, 并且 t 不是 p 的正整数次方幂, 则 $\mathrm{Der}_{-t}(\mathrm{H}) = 0$.

证明 令 $\phi \in \mathrm{Der}_{-t}(\mathrm{H})$. 考察 $\mathbb{Z}$- 次数, 可设

$$\phi(\mathrm{D_H}(x^{((t+1)\varepsilon_i)})) = \sum_{l=1}^{s} a_l \mathrm{D}_l, \quad i \in Y_0, \quad a_l \in \mathbb{F}.$$

将 ϕ 作用于等式

$$[\mathrm{D_H}(x^{((t+1)\varepsilon_i)}), \mathrm{D_H}(x_j x_k)] = 0, \quad j \in Y_0, \quad j \ne i, \quad k \in Y_1,$$

则可推得 $a_l = 0$, $\forall l \in Y \backslash \{i'\}$. 故 $\phi(\mathrm{D_H}(x^{((t+1)\varepsilon_i)})) = a_{i'}\mathrm{D}_{i'}$.

若 $t \not\equiv 0 \pmod p$, 将 ϕ 作用于等式

$$[\mathrm{D_H}(x^{((t+1)\varepsilon_i)}), \mathrm{D_H}(x_i x_{i'})] = (t+1)\sigma(i)\mathrm{D_H}(x^{((t+1)\varepsilon_i)}),$$

则可得 $a_{i'} = 0$. 故 $\phi(\mathrm{D_H}(x^{((t+1)\varepsilon_i)})) = 0$. 由引理 4.17 知 $\phi = 0$.

若 $t \equiv 0 \pmod p$, 令 $t = \sum_{i=1}^{k} b_i p^i$ 是 t 的 p-adic 数的形式, 其中 $b_k \ne 0$. 设 $q = p^k$, 则 $\binom{t+1}{q} \not\equiv 0 \pmod p$. 考察 $\mathbb{Z}$- 次数知

$$\phi(\mathrm{D_H}(x^{((t-q+2)\varepsilon_i)})) = \phi(\mathrm{D_H}(x^{(q\varepsilon_i + \varepsilon_{i'})})) = 0.$$

应用 ϕ 于等式

$$[\mathrm{D_H}(x^{((t-q+2)\varepsilon_i)}), \mathrm{D_H}(x^{(q\varepsilon_i + \varepsilon_{i'})})] = \sigma(i)\binom{t+1}{q}\mathrm{D_H}(x^{((t+1)\varepsilon_i)}),$$

则可获得 $\phi(\mathrm{D_H}(x^{((t+1)\varepsilon_i)})) = 0$. 由引理 4.17 知 $\phi = 0$. □

命题 4.19 设 $t=p^k$, 其中 $k\in\mathbb{N}$, 则

$$\operatorname{Der}_{-t}(\mathrm{H})=\operatorname{span}_{\mathbb{F}}\big\{(\operatorname{ad}\mathrm{D}_i)^t \mid i\in Y_0\big\}.$$

证明 设 $\phi\in\operatorname{Der}_{-t}(\mathrm{H})$. 由命题 4.18 的前部分证明知 $\phi(\mathrm{D_H}(x^{((t+1)\varepsilon_i)}))=a_{i'}\mathrm{D}_{i'}$, $\forall i\in Y_0$. 于是可得

$$\left(\phi-\sum_{j=1}^{m}\sigma(j)a_{j'}(\operatorname{ad}\mathrm{D}_j)^t\right)(\mathrm{D_H}(x^{((t+1)\varepsilon_i)}))=0.$$

由引理 4.17 知

$$\phi=\sum_{j=1}^{m}\sigma(j)a_{j'}(\operatorname{ad}\mathrm{D}_j)^t\in\operatorname{span}_{\mathbb{F}}\big\{(\operatorname{ad}\mathrm{D}_i)^t \mid i\in Y_0\big\},$$

命题得证. □

定理 4.20 $\operatorname{Der}(\mathrm{H})=\operatorname{ad}(\widetilde{\mathrm{H}}+\mathbb{F}h)\oplus\operatorname{span}_{\mathbb{F}}\big\{(\operatorname{ad}\mathrm{D}_i)^{p^{k_i}} \mid i\in Y_0, 1\le k_i\le t_i-1\big\}$.

证明 由命题 4.7, 4.11, 4.18, 4.19 与命题 2.9 可直接得到本定理. □

§5 K 的导子超代数 [84]

我们在本节确定李超代数 $\mathrm{K}=\mathrm{K}(m,n,\underline{t})$ 的导子超代数, 这里 $m=2r+1$ 是奇数, $r\ge 1$. 由 §1 节知, $\mathrm{K}=\bigoplus_{i\ge -2}^{\lambda}\mathrm{K}_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数, 其中

$$\mathrm{K}_i=\operatorname{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(\alpha)}x^u \mid i=\|\alpha\|+|u|-2\},\quad \|\alpha\|:=|\alpha|+\alpha_m.$$

当 $n-m-3\not\equiv 0 \pmod p$ 时, $\lambda=\|\pi\|+n-2$; 当 $n-m-3\equiv 0 \pmod p$ 时, $\lambda=\|\pi\|+n-3$. 由于 K 是 $\mathbb{Z}$- 阶化的, 所以 $\operatorname{Der}(\mathrm{K})=\bigoplus_{t\in\mathbb{Z}}\operatorname{Der}_t(\mathrm{K})$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数, 其中

$$\operatorname{Der}_t(\mathrm{K})=\{\phi\in\operatorname{Der}(\mathrm{K}) \mid \phi(\mathrm{K}_i)\subseteq\mathrm{K}_{t+i}, \forall i\in\mathbb{Z}\}.$$

在本节中, Y, Y_0 与 Y_1 仍如 §1 所定义. 令 $J_0=\{1,\cdots,m-1\}$, $J=J_0\cup Y_1$. 对 $i\in J$, i' 与 $\sigma(i)$ 分别如第一章 (2.11) 与 (2.12) 式所定义. 当 $i\in Y$ 时, $\tau(i)$ 如第一章 §2 所定义. K 中的 [,] 运算已由第一章 (2.30) 式给出.

引理 5.1 设 $\phi\in\operatorname{Der}(\mathrm{K}), f\in\mathrm{K}$. 设 $[f,x_i]=b_i, \forall i\in J$. 若 $\phi(x_i)=\phi(b_i)=0, \forall i\in J$, 则 $\phi(f)\in\mathrm{K}_{-2}$.

证明 由 $[f,x_i]=b_i$ 知

$$[\phi(f),x_i]+(-1)^{\mathrm{d}(\phi)\mathrm{d}(f)}[f,\phi(x_i)]=0,\quad \forall i\in J.$$

由上式与 $\phi(x_i)=0$ 知, $[\phi(f),x_i]=0$, $\forall i\in J$. 易见

$$[\phi(f),1]=[\phi(f),[x_1,x_{1'}]]$$

$$= [[\phi(f), x_1], x_{1'}] + [x_1, [\phi(f), x_{1'}]] = 0.$$

于是 $\mathrm{D}_m(\phi(f)) = [\phi(f), 1] = 0$. 进而由第一章 (2.30) 式可算得

$$\begin{aligned}[\phi(f), x_i] &= \sum_{j\in J}\sigma(j)(-1)^{\mathrm{d}(\phi(f))\tau(j)}\mathrm{D}_j(\phi(f))\mathrm{D}_{j'}(x_i)\\ &= (-1)^{\mathrm{d}(\phi(f))\tau(i')}\mathrm{D}_{i'}(\phi(f)),\ \forall i\in J.\end{aligned}$$

由 $[\phi(f), x_i] = 0$ 知 $\mathrm{D}_{i'}(\phi(f)) = 0$, $\forall i \in J$. 因此 $\phi(f) \in \mathrm{K}_{-2}$. □

引理 5.2 设 $\phi \in \mathrm{Der}_t(\mathrm{K}), t \in \mathbb{Z}$, 并且 $\phi(\mathrm{K}_j) = 0$, $j = -2, -1, \cdots, k$. 若 $k + t \geq -2$, 则 $\phi = 0$.

利用引理 5.1 , 与引理 2.8 的证明相仿, 可证得本引理.

引理 5.3 设 $f_i \in \Lambda(m, n, \underline{t})$, $\forall i \in Y$, 并且

$$\mathrm{D}_i(f_j) = (-1)^{\tau(i)\tau(j)}\mathrm{D}_j(f_i), \quad \forall i, j \in Y.$$

则

1) f_i 是 x_i- 截头的, $\forall i \in Y_1$.

2) 设 $i \in Y_0$, 则 f_i 是 x_i- 截头的当且仅当 f_i 中不含有项 $cx^{(\pi_i\varepsilon_i)}$, 其中 $0 \neq c \in \mathbb{F}$.

证明 1) 由已知, $\mathrm{D}_i(f_i) = -\mathrm{D}_i(f_i)$, 其中 $i \in Y_1$, 故 $\mathrm{D}_i(f_i) = 0$ 所以 f_i 是 x_i- 截头的, $\forall i \in Y_1$.

2) 设 $i \in Y_0$. 若 f_i 含有项 $cx^{(\pi_i\varepsilon_i)}$, 其中 $0 \neq c \in \mathbb{F}$, 易见 $\mathrm{D}_i^{\pi_i}(f_i) \neq 0$. 故 f_i 不是 x_i- 截头的. 反之, 若 f_i 不是 x_i- 截头的, 则可设 $f_i = x^{(\pi_i\varepsilon_i)}g + h$, 其中 $g, h \in \Lambda(m, n, \underline{t})$, 并且 $\mathrm{D}_i(g) = 0$, $\mathrm{D}_i^{\pi_i}(h) = 0$. 任取 $j \in Y\backslash\{i\}$, 由已知

$$\mathrm{D}_i(f_j) = \mathrm{D}_j(f_i) = x^{(\pi_i\varepsilon_i)}\mathrm{D}_j(g) + \mathrm{D}_j(h).$$

由于 $\mathrm{D}_i(f_j)$ 与 $\mathrm{D}_j(h)$ 都是 x_i- 截头的, 因此由上式知 $x^{(\pi_i\varepsilon_i)}\mathrm{D}_j(g)$ 是 x_i- 截头的. 故 $\mathrm{D}_j(g) = 0$, $\forall j \in Y\backslash\{i\}$. 又因为 $\mathrm{D}_i(g) = 0$, 所以 $g \in \mathbb{F}$. 设 $g = c$, 则 $f_i = cx^{(\pi_i\varepsilon_i)} + h$. 由于 f_i 不是 x_i- 截头的, 故 $\mathrm{D}_i^{\pi_i}(f_i) \neq 0$, 于是 $c \neq 0$. 因此 f_i 中含有项 $cx^{(\pi_i\varepsilon_i)}$. □

引理 5.4 设 $\phi \in \mathrm{Der}(\mathrm{K})$. 令 $f_m = 2^{-1}\phi(1)$,

$$f_i = -(-1)^{\tau(i)\mathrm{d}(\phi)}\sigma(i)\phi(x_{i'}) + \sigma(i)x_{i'}f_m, \quad \forall i \in J.$$

则 $\mathrm{D}_i(f_j) = (-1)^{\tau(i)\tau(j)}\mathrm{D}_j(f_i)$, $\forall i, j \in Y$.

证明 由已知得

$$\phi(1) = 2f_m, \tag{5.1}$$

$$\phi(x_{i'}) = (-1)^{\tau(i)\mathrm{d}(\phi)}x_{i'}f_m - (-1)^{\tau(i)\mathrm{d}(\phi)}\sigma(i)f_i, \quad \forall i \in J. \tag{5.2}$$

由 $[1, x_{i'}] = 0$ 知

$$[\phi(1), x_{i'}] + [1, \phi(x_{i'})] = 0. \tag{5.3}$$

将 (5.1) 与 (5.2) 式代入 (5.3) 式, 可算得

$$\mathrm{D}_i(f_m) = \mathrm{D}_m(f_i) = (-1)^{\tau(i)\tau(m)}\mathrm{D}_m(f_i). \tag{5.4}$$

设 $i, j \in J$, 并且 $j \neq i'$. 按第一章公式 (2.30) 可算得

$$\begin{aligned}
&[\phi(x_{i'}), x_{j'}] \\
&= [(-1)^{\tau(i)\mathrm{d}(\phi)}x_{i'}f_m - (-1)^{\tau(i)\mathrm{d}(\phi)}\sigma(i)f_i, x_{j'}] \\
&= -(-1)^{\mathrm{d}(\phi)\tau(i')+\tau(i')\tau(j')+\mathrm{d}(\phi)\tau(j')}x_{j'}\mathrm{D}_m(x_{i'}f_m) \\
&\quad +(-1)^{\mathrm{d}(\phi)\tau(i')+\tau(j)\tau(i')+\tau(j)\mathrm{d}(\phi)}\sigma(j)\mathrm{D}_j(x_{i'}f_m) \\
&\quad +(-1)^{\tau(i)\mathrm{d}(\phi)+\mathrm{d}(f_i)\tau(j')}\sigma(i)x_{j'}\mathrm{D}_m(f_i) \\
&\quad -(-1)^{\tau(i)\mathrm{d}(\phi)+\tau(j)\mathrm{d}(f_i)}\sigma(i)\sigma(j)\mathrm{D}_j(f_i).
\end{aligned} \tag{5.5}$$

同样可算得

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\mathrm{d}(\phi)\tau(i')}[x_{i'}, \phi(x_{j'})] \\
&= (-1)^{\mathrm{d}(\phi)\tau(i')}[x_{i'}, (-1)^{\tau(j)\mathrm{d}(\phi)}x_{j'}f_m - (-1)^{\tau(j)\mathrm{d}(\phi)}\sigma(j)f_j] \\
&= (-1)^{\mathrm{d}(\phi)\tau(i)+\mathrm{d}(\phi)\tau(j')}x_{i'}\mathrm{D}_m(x_{j'}f_m) \\
&\quad +(-1)^{\mathrm{d}(\phi)\tau(i')+\mathrm{d}(\phi)\tau(j')+\tau(i')}\sigma(i')\mathrm{D}_i(x_{j'}f_m) \\
&\quad -(-1)^{\mathrm{d}(\phi)\tau(i')+\mathrm{d}(\phi)\tau(j')}\sigma(j)x_{i'}\mathrm{D}_m(f_j) \\
&\quad -(-1)^{\mathrm{d}(\phi)\tau(i')+\mathrm{d}(\phi)\tau(j)+\tau(i)}\sigma(j)\sigma(i')\mathrm{D}_i(f_j).
\end{aligned} \tag{5.6}$$

由于 $\mathrm{d}(f_i) = \mathrm{d}(\phi) + \tau(i')$, $\mathrm{D}_i(f_m) = \mathrm{D}_m(f_i)$ 以及

$$\sigma(i) + (-1)^{\tau(i')}\sigma(i') = 0, \ \forall i \in J,$$

所以

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\tau(i)\mathrm{d}(\phi)+\mathrm{d}(f_i)\tau(j')}\sigma(i)x_{j'}\mathrm{D}_m(f_i) \\
&\quad +(-1)^{\mathrm{d}(\phi)\tau(i')+\mathrm{d}(\phi)\tau(j')+\tau(i')}\sigma(i')\mathrm{D}_i(x_{j'}f_m) \\
&= (-1)^{\tau(i)\mathrm{d}(\phi)+\mathrm{d}(\phi)\tau(j')+\tau(i')\tau(j')}(\sigma(i) + (-1)^{\tau(i)}\sigma(i'))x_{j'}\mathrm{D}_m(f_i) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

同理可得

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\mathrm{d}(\phi)\tau(i')+\tau(j)\tau(i')+\tau(j)\mathrm{d}(\phi)}\sigma(j)\mathrm{D}_j(x_i f_m) \\
&\quad -(-1)^{\mathrm{d}(\phi)\tau(i')+\mathrm{d}(\phi)\tau(j)}\sigma(j)x_{i'}\mathrm{D}_m(f_j) = 0,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$(-1)^{\mathrm{d}(\phi)\tau(i)+\tau(i')\tau(j')+\mathrm{d}(\phi)\tau(j')}x_{j'}\mathrm{D}_m(x_{i'}f_m)$$

$$-(-1)^{\mathrm{d}(\phi)\tau(i)+\mathrm{d}(\phi)\tau(j')}x_{i'}\mathrm{D}_m(x_{j'}f_m)=0. \tag{5.9}$$

因为

$$[\phi(x_{i'}),x_{j'}]+(-1)^{\mathrm{d}(\phi)\tau(i')}[x_{i'},\phi(x_{j'})]=\phi[x_{i'},x_{j'}]=0, \tag{5.10}$$

所以, 由 (5.5)~(5.10) 式可得

$$\begin{aligned}&-(-1)^{\tau(i)\mathrm{d}(\phi)+\tau(j)\mathrm{d}(f_i)}\sigma(i)\sigma(j)\mathrm{D}_j(f_i)\\&-(-1)^{\mathrm{d}(\phi)\tau(i')+\mathrm{d}(\phi)\tau(j)+\tau(i')}\sigma(j)\sigma(i')\mathrm{D}_i(f_j)=0.\end{aligned}$$

于是 $(\sigma(i)-(-1)^{\tau(i)}\sigma(i'))((-1)^{\tau(j)\tau(i)}\mathrm{D}_j(f_i)-\mathrm{D}_i(f_j))=0$. 所以

$$\mathrm{D}_i(f_j)=(-1)^{\tau(i)\tau(j)}\mathrm{D}_j(f_i),\quad i,j\in J,\quad j\neq i'. \tag{5.11}$$

因为 $[x_i,x_{i'}]=(-1)^{\tau(i)}\sigma(i)1$, 所以

$$[\phi(x_i),x_{i'}]+(-1)^{\mathrm{d}(\phi)\tau(i)}[x_i,\phi(x_{i'})]=(-1)^{\tau(i)}\sigma(i)\phi(1).$$

利用上式与 (5.1), (5.2), (5.4), (5.11) 式可推得

$$\mathrm{D}_i(f_{i'})=(-1)^{\tau(i)\tau(i')}\mathrm{D}_i(f_i),\quad \forall i\in J. \tag{5.12}$$

由 (5.4), (5.11) 与 (5.12) 知引理成立. □

引理 5.5 设 $\phi\in\mathrm{Der}(\mathrm{K})$. *则存在* $f\in\Lambda(m,n,\underline{t})$, *使得* $(\phi-\mathrm{ad}\,f)(\mathrm{K}_j)=0$, *其中* $j=-2,-1$

证明 令

$$\begin{aligned}&f_m=2^{-1}\phi(1),\\&f_i=(-1)^{\tau(i)\mathrm{d}(\phi)}\sigma(i)\phi(x_{i'})+\sigma(i)x_{i'}f_m,\quad \forall i\in J.\end{aligned}$$

由引理 5.4 知, $\mathrm{D}_i(f_j)=(-1)^{\tau(i)\tau(j)}\mathrm{D}_j(f_i)$, $\forall i,j\in Y$. 由引理 5.3 的 1) 知, f_i 是 x_i- 截头的, $\forall i\in Y_1$. 因为 $[x_m,1]=-2$, 所以

$$[\phi(x_m),1]+[x_m,\phi(1)]=-2\phi(1).$$

将 $\phi(1)=2f_m$ 代入上式可算得

$$2x_m\mathrm{D}_m(f_m)=\mathrm{D}_m(\phi(x_m))+\sum_{i\in J}x_i\mathrm{D}_i(f_m). \tag{5.13}$$

由于 f_m 是 x_m- 截头的, 故 (5.13) 式中的右端不含项 $cx^{(\pi_m\varepsilon_m)}$, 其中 $0\neq c\in\mathbb{F}$. 因此 (5.13) 的左端也不含项 $cx^{(\pi_m\varepsilon_m)}$, 从而知 f_m 不含项 $cx^{(\pi_m\varepsilon_m)}$. 由引理 5.3 的 2) 知, f_m 是 x_m- 截头的. 相仿地, 将 ϕ 作用于等式 $[x_{i'},x_m]=x_{i'}$, 再利用 (5.4) 与 (5.11) 式以

及引理 5.3 的 2), 则可知 f_i 是 x_i- 截头的, $\forall i \in J_0$. 由命题 2.5 知, 存在 $f \in \Lambda(m,n,\underline{t})$, 使得

$$f_i = \mathrm{D}_i(f), \quad \forall i \in Y. \tag{5.14}$$

由 (5.1), (5.2) 与 (5.14) 式, 直接验证可知

$$(\phi - \operatorname{ad} f)(1) = 0, \qquad (\phi - \operatorname{ad} f)(x_i) = 0, \quad \forall i \in J.$$

于是 $(\phi - \operatorname{ad} f)(\mathrm{K}_j) = 0$, 其中 $j = -2, -1$. □

命题 5.6 设 $\phi \in \mathrm{Der}_t(\mathrm{K}), t \geq -1$. 则*存在* $f \in \Lambda(m,n,\underline{t})$, *使得* $\phi = \operatorname{ad} f$.

证明 由引理 5.5 知, 存在 $f \in \Lambda(m,n,\underline{t})$, 使得 $(\phi - \operatorname{ad} f)(\mathrm{K}_j) = 0$, $j = -2, -1$. 因为 $t \geq -1$, 所以由引理 5.2 知, $\phi - \operatorname{ad} f = 0$. 于是 $\phi = \operatorname{ad} f$. □

命题 5.7 $\mathrm{Der}_{-2}(\mathrm{K}) = \operatorname{ad} \mathrm{K}_{-2}$, $\mathrm{Der}_{-3}(\mathrm{K}) = 0$.

证明 设 $\phi \in \mathrm{Der}_{-2}(\mathrm{K})$, 则 $\phi(\mathrm{K}_j) = 0$, $j = -2, -1$. 因 $\mathrm{zd}(x_m) = 0$, 故可设 $\phi(x_m) = c$, 其中 $c \in \mathbb{F}$. 令 $\psi = \phi - 2^{-1} \operatorname{ad} 1$, 则 $\psi(\mathrm{K}_j) = 0$, $j = -2, -1$, 并且 $\psi(x_m) = 0$. 任取 $i, j \in J$. 因为 $\psi(x_i x_j) \in \mathrm{K}_{-2}$, 故可设 $\psi(x_i x_j) = a1$, $a \in \mathbb{F}$. 将 ψ 作用于等式 $[x_i x_j, x_m] = 0$, 可得 $[a1, x_m] = 0$. 因此 $a1 = 0$. 于是 $\psi(x_i x_j) = 0$, 故 $\psi(\mathrm{K}_0) = 0$. 由引理 5.2 知 $\psi = 0$, 所以 $\phi \in \operatorname{ad} \mathrm{K}_{-2}$.

设 $\phi \in \mathrm{Der}_{-3}(\mathrm{K})$, 则 $\phi(\mathrm{K}_j) = 0$, $j = -2, -1, 0$. 可设 $\phi(x_m x_i) = c1$, 其中 $i \in J, c \in \mathbb{F}$. 将 ϕ 作用于等式 $[x_m, x_m x_i] = x_m x_i$, 可推得 $-2c1 = c1$. 因为 $\mathrm{char}\mathbb{F} = p > 3$, 所以 $c1 = 0$. 因此 $\phi(x_m x_i) = 0$, $\forall i \in J$. 同理可证得 $\phi(x_i x_j x_k) = 0$, 其中 $i, j, k \in J$. 所以 $\phi(\mathrm{K}_{-1}) = 0$. 由引理 5.2 知 $\phi = 0$. □

引理 5.8 设 $T = \{x^{(k_i \varepsilon_i)} \mid i \in Y_0, 0 \leq k_i \leq \pi_i\}$, $M = \{x_i \mid i \in Y_1\}$. 则 $T \cup M$ 生成 K.

证明 设 $T \cup M$ 生成的 K 的子代数为 Q. 我们先讨论 $n - m - 3 \not\equiv 0 \pmod p$ 的情形.

1) 对 k 用归纳法证明 $\prod_{i=1}^{k} x_{m+i} \in Q$. 显然当 $k = 1$ 时结论成立. 假设当 $l \leq k-1$ 时, $\prod_{i=1}^{l} x_{m+i} \in Q$. 因为 $x_{m+k} x_m = [x_{m+k}, x^{(2\varepsilon_m)}] \in Q$, 所以

$$\left[\prod_{i=1}^{k-1} x_{m+i}, x_{m+k} x_m\right] = (3-k) \prod_{i=1}^{k} x_{m+i} \in Q.$$

若 $3 - k \not\equiv 0 \pmod p$, 则 $\prod_{i=1}^{k} x_{m+i} \in Q$. 设 $3 - k \equiv 0 \pmod p$. 因为

$$x_{m+k-1} x_{m+k} x_m = [x_{m+k-1}, [x_{m+k}, x^{(3\varepsilon_m)}]] \in Q,$$

所以

$$\left[\prod_{i=1}^{k-2} x_{m+i}, x_{m+k-1} x_{m+k} x_m\right] = (4-k) \prod_{i=1}^{k} x_{m+i} \in Q.$$

由于 $4-k\not\equiv 0 \pmod p$, 故 $\prod_{i-1}^{k} x_{m+i}\in Q$. 归纳法完成. 特别地, 我们证明了 $x^{E}=\prod_{i=1}^{n} x_{m+i}\in Q$.

2) $x^{(\pi-\varepsilon_m)}\in Q$. 我们首先对 k 用归纳法证明 $x^{(\pi_1\varepsilon_1+\cdots+\pi_k\varepsilon_k)}x_{m+1}\in Q$, 其中 $k<m$. 由于 $x_mx_{m+1}=[x_{m+1},x^{(2\varepsilon_m)}]\in Q$, 所以

$$3x^{(\pi_1\varepsilon_1)}x_{m+1}=[x^{(\pi_1\varepsilon_1)},x_mx_{m+1}]\in Q.$$

因 $\mathrm{char}\mathbb{F}=p>3$, 故 $x^{(\pi_1\varepsilon_1)}x_{m+1}\in Q$. 因此当 $k=1$ 时结论成立.

假设 $x^{(\pi_1\varepsilon_1+\cdots+\pi_{k-1}\varepsilon_{k-1})}x_{m+1}\in Q$. 因为

$$x_{1'}x_{m+2}=[x_{1'},x_mx_{m+2}]\in Q,$$

所以

$$\begin{aligned}&x^{((\pi_1-1)\varepsilon_1+\pi_2\varepsilon_2+\cdots+\pi_{k-1}\varepsilon_{k-1})}x_{m+1}x_{m+2}\\&=[x^{(\pi_1\varepsilon_1+\cdots+\pi_{k-1}\varepsilon_{k-1})},x_{1'}x_{m+2}]\in Q.\end{aligned}$$

由 $[x^{(\pi_k\varepsilon_k)},x_mx_{m+1}]=3x^{(\pi_k\varepsilon_k)}x_{m+1}$ 知, $x^{(\pi_k\varepsilon_k)}x_{m+1}\in Q$. 因此

$$\begin{aligned}&x^{((\pi_1-1)\varepsilon_1+\pi_2\varepsilon_2+\cdots+\pi_k\varepsilon_k)}x_{m+2}\\&=[x^{((\pi_1-1)\varepsilon_1+\pi_2\varepsilon_2+\cdots+\pi_{k-1}\varepsilon_{k-1})}x_{m+1}x_{m+2},x^{(\pi_k\varepsilon_k)}x_{m+1}]\in Q.\end{aligned}$$

因为

$$x^{(2\varepsilon_1)}x_{m+1}=[x^{(3\varepsilon_1)},[x_{1'},x_mx_{m+1}]]\in Q,$$

所以

$$x_1x_{m+1}x_{m+2}=[x^{(2\varepsilon_1)}x_{m+1},x_{1'}x_{m+2}]\in Q.$$

因而有

$$\begin{aligned}&x^{(\pi_1\varepsilon_1+\cdots+\pi_k\varepsilon_k)}x_{m+1}\\&=[x^{((\pi_1-1)\varepsilon_1+\pi_2\varepsilon_2+\cdots+\pi_k\varepsilon_k)}x_{m+2},x_1x_{m+1}x_{m+2}]\in Q.\end{aligned}$$

归纳法完成. 从而可得 $x^{(\pi_1\varepsilon_1+\cdots+\pi_{m-1}\varepsilon_{m-1})}x_{m+1}\in Q$. 因为

$$x^{((\pi_m-1)\varepsilon_m)}x_{m+1}=[x_{m+1},x^{(\pi_m\varepsilon_m)}]\in Q,$$

所以

$$x^{(\pi-\varepsilon_m)}=[x^{(\pi_1\varepsilon_1+\cdots+\pi_{m-1}\varepsilon_{m-1})}x_{m+1},x^{((\pi_m-1)\varepsilon_m)}x_{m+1}]\in Q.$$

3) $x^{(\pi)}x^{E}\in Q$. 由 1) 知

$$(2-n)x^{(2\varepsilon_m)}x^{E}=[x^{E},x^{(3\varepsilon_m)}]\in Q.$$

若 $2-n\not\equiv 0 \pmod p$, 则 $x^{(2\varepsilon_m)}x^E\in Q$. 若 $2-n\equiv 0 \pmod p$, 由 1) 知

$$x^{(2\varepsilon_m)}x^E=(3-n)x^{(2\varepsilon_m)}x^E=\left[\prod_{i=1}^{n-1}x_{m+i},[x_s,x^{(4\varepsilon_m)}]\right]\in Q.$$

由 2) 知 $(n-m-3)x^{(\pi)}x^E=[x^{(\pi-\varepsilon_m)},x^{(2\varepsilon_m)}x^E]\in Q$. 因为 $n-m-3\not\equiv 0 \pmod p$, 所以 $x^{(\pi)}x^E\in Q$.

4) 我们对 $l=(\sum_{i=1}^m\pi_i+n)-(|\alpha|+|u|)$ 用归纳法证明 $x^{(\alpha)}x^u\in Q$. 当 $l=0$ 时, $x^{(\alpha)}x^u=x^{(\pi)}x^E$. 由 3) 知 $x^{(\alpha)}x^u\in Q$.

令 $l>0$. 假设对 $l-1$ 结论成立. 设 $x^{(\alpha)}x^u\in \mathrm{K}$, 并且 $(\sum_{i=1}^m\pi_i+n)-(|\alpha|+|u|)=l$. 若 $|u|<n$, 则存在 $k\in Y_1$ 使得 $x_kx^u\neq 0$. 由归纳假设 $x^{(\alpha)}x_kx^u\in Q$, 所以 $x^{(\alpha)}x^u=-[x_k,x^{(\alpha)}x_kx^u]\in Q$. 设 $|u|=n$. 由 $l>0$ 知存在 $i\in Y_0$, 使得 $x^{(\alpha+\varepsilon_i)}x^u\in\mathrm{K}$. 由归纳假设知 $x^{(\alpha+\varepsilon_i)}x^u\in Q$. 如果 $i=m$, 则

$$x^{(\alpha)}x^u=[1,x^{(\alpha+\varepsilon_m)}x^u]\in Q.$$

如果 $i\neq m$, 由归纳假设 $x_{i'}x^{(\alpha+\varepsilon_i-\varepsilon_m)}x^u\in Q$. 于是

$$x^{(\alpha)}x^u=\sigma(i')[x_{i'},x^{(\alpha+\varepsilon_i)}x^u]+\sigma(i')x_{i'}x^{(\alpha+\varepsilon_i-\varepsilon_m)}x^u\in Q.$$

归纳法完成. 于是我们证明了 $Q=\mathrm{K}$.

设 $n-m-3\equiv 0 \pmod p$. 由 2) 知 $x^{(\pi-\varepsilon_m)}\in Q$, 从而

$$x^{(\pi-\pi_1\varepsilon_1-\varepsilon_m)}=-(\operatorname{ad}x_{1'})^{\pi_{1'}}(x^{(\pi-\varepsilon_m)})\in Q.$$

由 3) 知 $x^{(2\varepsilon_m)}x^E\in Q$. 于是

$$(n-m-2)x^{(\pi-\pi_1\varepsilon_1)}x^E=[x^{(\pi-\pi_1\varepsilon_1-\varepsilon_m)},x^{(2\varepsilon_m)}x^E]\in Q.$$

因为 $n-m-3\equiv 0 \pmod p$, 故 $x^{(\pi-\pi_1\varepsilon_1)}x^E\in Q$. 任取 $k\in Y_1$. 由于 $x_mx_k=[x_k,x^{(2\varepsilon_m)}]\in Q$, 所以 $x^{(\pi_1\varepsilon_1)}x_k=3^{-1}[x^{(\pi_1\varepsilon_1)},x_mx_k]\in Q$. 令

$$E_k=\langle m+1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,s\rangle\in B_{n-1}\subseteq B(n).$$

则有

$$x^{(\pi)}x^{E_k}=(-1)^k[x^{(\pi_1\varepsilon_1)}x_k,x^{(\pi-\pi_1\varepsilon_1)}x^E]\in Q,\tag{5.15}$$

$$x^{(\pi-\varepsilon_m)}x^E=[x_k,x^{(\pi)}x^{E_k}]\in Q.\tag{5.16}$$

任取 $i\in Y_0$, 则 $x_{i'}x_k=[x_{i'},x_mx_k]\in Q$. 从而

$$x^{(\pi-\varepsilon_i)}x^E=\sigma(i)(-1)^{n-k}[x^{(\pi)}x^{E_k},x_{i'}x_k]\in Q.\tag{5.17}$$

由 (5.15), (5.16) 与 (5.17) 式知, 当 $|\beta|+|v|=\sum_{i=1}^m\pi_i+n-1$ 时, $x^{(\beta)}x^v\in Q$. 仿 4), 对 $l=(\sum_{i=1}^m\pi_i+n-1)-(|\alpha|+|u|)$ 用归纳法, 可证得 $x^{(\alpha)}x^u\in Q$. 从而 $Q=\mathrm{K}$. □

引理 5.9 设 $\phi \in \mathrm{Der}_{-t}(\mathrm{K}), t > 3$. 若 $\phi(x^{(t\varepsilon_i)}) = 0,\ \forall i \in J_0$, 则 $\phi(x^{(k\varepsilon_i)}) = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in J_0$.

证明 因为 $x^{(t\varepsilon_i)} \in \mathrm{K}_{t-2}$, 故 $\phi(x^{(k\varepsilon_i)}) = 0$, 其中 $0 \le k < t$. 由已知 $\phi(x^{(t\varepsilon_i)}) = 0$. 我们对 k 用归纳法证明, 当 $k > t$ 时 $\phi(x^{(t\varepsilon_i)}) = 0$. 因为

$$[x^{(k\varepsilon_i)}, x_j] = \delta_{i'j}\sigma(i)x^{((k-1)\varepsilon_i)}, \quad \forall j \in J,$$

并且由归纳假设知 $\phi(x^{((k-1)\varepsilon_i)}) = 0$, 所以 $[x^{(k\varepsilon_i)}, x_j] = 0,\ \forall j \in J$. 由引理 5.1 知 $\phi(x^{(k\varepsilon_i)}) \in \mathrm{K}_{-2}$. 因此 $\phi(x^{(k\varepsilon_i)}) \in \mathrm{K}_{-2} \cap \mathrm{K}_{k-2-t} = 0$. □

引理 5.10 设 $\phi \in \mathrm{Der}_{-t}(\mathrm{K}), t > 3$. 若 $\phi(x^{(l\varepsilon_m)}) = \phi(x^{((l-1)\varepsilon_m)}) = 0$, 则 $\phi(x^{(l\varepsilon_m)}x_i) = 0,\ i \in J$.

证明 先证 $i \in J_0$ 的情形. 若 $t > 4$, 则 $\phi(x_m x_i x_{i'}) = 0$. 若 $t = 4$, 可设 $\phi(x_m x_i x_{i'}) = c_i 1$, 其中 $c_i \in \mathbb{F}$. 将 ϕ 作用于等式

$$[x_m x_i x_{i'}, x_m] = -2x_m x_i x_{i'}$$

可推得 $c_i = 0$. 故也有 $\phi(x_m x_i x_{i'}) = 0$. 若 $2 - l \not\equiv 0 \pmod p$, 将 ϕ 作用于等式

$$[x^{(l\varepsilon_m)}, x_m x_i] = (2-l)x^{(l\varepsilon_m)}x_i,$$

可知 $\phi(x^{(l\varepsilon_m)}x_i) = 0$. 若 $2 - l \equiv 0 \pmod p$, 将 ϕ 作用于

$$[x^{((l-1)\varepsilon_m)}, x_m x_i] = (3-l)x^{((l-1)\varepsilon_m)}x_i,$$

可知 $\phi(x^{((l-1)\varepsilon_m)}x_i) = 0$. 利用 $[x^{(l\varepsilon_m)}, x_m x_i x_{i'}] = x^{(l\varepsilon_m)}x_i x_{i'}$, 可得

$$\phi(x^{(l\varepsilon_m)}x_i x_{i'}) = 0.$$

因为

$$[x^{(l\varepsilon_m)}x_i x_{i'}, x_i] + [x^{((l-1)\varepsilon_m)}x_i, x_m x_i x_{i'}] = \sigma(i')(1-l)x^{(l\varepsilon_m)}x_i,$$

并且 $1 - l \equiv -1 \pmod p$, 所以 $\phi(x^{(l\varepsilon_m)}x_i) = 0$.

设 $i \in Y_1$. 任取 $j \in J_0$, 由上面的结论知, $\phi(x^{(l\varepsilon_m)}x_j) = 0$. 利用 $[x^{(l\varepsilon_m)}x_j, x_j x_i] = \sigma(j)x^{(l\varepsilon_m)}x_i$, 可得 $\phi(x^{(l\varepsilon_m)}x_i) = 0$. □

引理 5.11 设 $\phi \in \mathrm{Der}_{-t}(\mathrm{K}), t > 3$. 令 $l = [\frac{t}{2}]$ 表示 $\frac{t}{2}$ 的整数部分. 若 $\phi(x^{(l\varepsilon_m)}) = 0$, 则 $\phi(x^{(k\varepsilon_m)}) = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$.

证明 若 $k < l$, 则 $2k < t$. 于是

$$\mathrm{zd}(\phi(x^{(k\varepsilon_m)})) = -t + 2k - 2 < -t + t - 2 = -2.$$

故 $\phi(x^{(k\varepsilon_m)}) = 0$. 设 $k \ge l$. 则 $2k - t \ge 2l - t \ge -1$. 我们对 k 用归纳法证明 $\phi(x^{(k\varepsilon_m)}) = 0$. 假设当 $r \le k$ 时, $\phi(x^{(r\varepsilon_m)}) = 0$. 由引理 5.10 知 $\phi(x^{(k\varepsilon_m)}x_i) = 0,\ \forall i \in J$. 因为 $[x^{((k+1)\varepsilon_m)}, x_i] = -x^{(k\varepsilon_m)}x_i,\ \forall i \in J$, 所以由引理 5.1 知 $\phi(x^{((k+1)\varepsilon_m)}) \in \mathrm{K}_{-2} \cap \mathrm{K}_{2k-t} = 0$. □

推论 5.12 设 $\phi \in \mathrm{Der}_{-t}(\mathrm{K}), t > 3$ 并且 t 是奇数, 则 $\phi(x^{(k\varepsilon_m)}) = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$.

证明 设 $l = [\frac{t}{2}]$. 因为

$$\mathrm{zd}(\phi(x^{(l\varepsilon_m)})) = (2l-2) - t = (t-1-2) - t = -3,$$

所以 $\phi(x^{(l\varepsilon_m)}) = 0$. 由引理 5.11 知 $\phi(x^{(k\varepsilon_m)}) = 0,\ \forall k \in \mathbb{Z}$. □

命题 5.13 设 $t > 3$. 若 $t \not\equiv 0 \pmod p$, 则 $\mathrm{Der}_{-t}(k) = 0$.

证明 设 $\phi \in \mathrm{Der}_{-t}(\mathrm{K})$. 任取 $i \in J_0$. 因为 $\phi(x^{(t\varepsilon_i)}) \in \mathrm{K}_{-2}$, 故可设 $\phi(x^{(t\varepsilon_i)}) = c_i 1$, 其中 $c_i \in \mathbb{F}$. 将 ϕ 作用于等式 $[x^{(t\varepsilon_i)}, x_m] = (2-t)x^{(t\varepsilon_m)}$, 则有 $-t(c_i 1) = 0$. 因为 $t \not\equiv 0 \pmod p$, 所以 $c_i = 0$. 于是 $\phi(x^{(t\varepsilon_i)}) = 0,\ \forall i \in J_0$. 由引理 5.9 知 $\phi(x^{(k\varepsilon_i)}) = 0,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall i \in J_0$.

若 t 是奇数, 由推论 5.12 知 $\phi(x^{(k\varepsilon_m)}) = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$.

若 t 是偶数, 设 $l = \frac{t}{2}$, 则 $\phi(x^{(l\varepsilon_m)}) \in \mathrm{K}_{-2}$. 设 $\phi(x^{(l\varepsilon_m)}) = a1$, 其中 $a \in \mathbb{F}$. 将 ϕ 作用于等式

$$[x^{(l\varepsilon_m)}, x_m] = (2-t)x^{(l\varepsilon_m)}$$

可得 $a = 0$. 故 $\phi(x^{(l\varepsilon_m)}) = 0$. 由引理 5.11 知 $\phi(x^{(k\varepsilon_m)}) = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$. 因为 $t > 3$, 故 $\phi(x_i) = 0, ,\forall i \in Y_1$. 由引理 5.8 知 $\phi = 0$. □

命题 5.14 设 $t > 3$, $t \equiv 0 \pmod p$. 若不存在 $v \in \mathbb{N}$, 使得 $t = p^v$ 或 $t = p^{2v}$, 则 $\mathrm{Der}_{-t}(\mathrm{K}) = 0$.

证明 将 t 写成 p-adic 数的形式: $t = \sum_{i=1}^{v} a_i p^i$, 其中 $a_v \neq 0$. 设 $\phi \in \mathrm{Der}_{-t}(\mathrm{K})$. 易见 $\phi(x^{((t-p^v-1)\varepsilon_i)}) \in \mathrm{K}_{-p^v-3} = 0$, $\phi(x_{i'}x^{(p^v\varepsilon_i)}) \in \mathrm{K}_{p^v-1-t}$, 其中 $i \in J_0$. 因为 $t \neq p^v$ 并且 $t \equiv 0 \pmod p$, 所以 $p^v - 1 - t < -2$. 因此 $\phi(x_{i'}x^{(p^v\varepsilon_i)}) = 0,\ \forall i \in J_0$. 由等式

$$[x^{((t-p^v+1)\varepsilon_i)}, x_{i'}x^{(p^v\varepsilon_i)}] = \sigma(i)\binom{t}{p^v}x^{(t\varepsilon_i)}$$

与 $\binom{t}{p^v} \not\equiv 0 \pmod p$, 可推得 $\phi(x^{(t\varepsilon_i)}) = 0$. 由引理 5.9 知 $\phi(x^{(k\varepsilon_i)}) = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in J_0$.

若 t 是奇数, 由推论 5.12 知 $\phi(x^{(k\varepsilon_m)}) = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$.

若 t 是偶数, 设 $l = \frac{t}{2}$. 令 $l = \sum_{i=0}^{v} a_i p^i$ 是 l 的 p-adic 数的形式. 若 $a_0 \neq 0$, 则 $p \nmid l$, 于是可知 $p \nmid t$. 此与 $t \equiv 0 \pmod p$ 矛盾. 故 $a_0 = 0$, 因而 $l = \sum_{i=1}^{v} a_i p^i$.

易见 $\phi(x^{((l-p^v+1)\varepsilon_m)}) \in \mathrm{K}_{-2p^v} = 0$, $\phi(x^{(p^v\varepsilon_m)}) \in \mathrm{K}_{2p^v-2l-2}$. 因为 $t \neq 2p^v$, 所以 $l \neq p^v$. 于是 $2p^v - 2l - 2 < -2$, 因此 $\phi(x^{(p^v\varepsilon_m)}) = 0$. 由于

$$[x^{((l-p^v+1)\varepsilon_m)}, x^{(p^v\varepsilon_m)}] = 2\left[\binom{l}{p^v-1} - \binom{l}{p^v}\right]x^{(l\varepsilon_m)}$$

以及 $\binom{l}{p^v} \not\equiv 0 \pmod p$, $\binom{l}{p^v-1} \equiv 0 \pmod p$, 于是可得 $\phi(x^{(l\varepsilon_m)}) = 0$. 由引理 5.11 知 $\phi(x^{(k\varepsilon_m)}) = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$. 显然 $\phi(x_i) = 0,\ \forall i \in Y_1$. 由引理 5.8 知 $\phi = 0$. □

命题 5.15 1) 若 $t=p^{r}$, $v>0$, 则

$$\operatorname{Der}_{-t}(\mathrm{K})=\operatorname{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D}_i^{p^v}\mid i\in J_0\}.$$

2) 若 $t=p^{2v}$, $v>0$, 则

$$\operatorname{Der}_{-t}(\mathrm{K})=\operatorname{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D}_m^{p^v}\}.$$

证明 1) 设 $\phi\in\operatorname{Der}_{-t}(\mathrm{K})$, 其中 $t=p^v$. 考察 $\mathbb{Z}$- 次数知 $\phi(x^{(t\varepsilon_i)})=c_i1$, 其中 $c_i\in\mathbb{F},i\in J_0$. 令 $\psi=\phi-\sum_{i=1}^{m-1}c_i\mathrm{D}_i^t$, 则 $\psi(x^{(t\varepsilon_j)})=0$, $\forall j\in J_0$. 由引理 5.9 知 $\psi(x^{(k\varepsilon_j)})=0$, $\forall k\in\mathbb{N}$. 由推论 5.12 知 $\psi(x^{(k\varepsilon_m)})=0$, $\forall k\in\mathbb{N}$. 显然 $\psi(x_i)=0$, $\forall i\in Y_1$. 由引理 5.8 知 $\psi=0$. 故 $\phi=\sum_{i=1}^{m-1}c_i\mathrm{D}_i^t\in\operatorname{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D}_i^{p^v}\mid i\in J_0\}$.

2) 设 $\phi\in\operatorname{Der}_{-t}(\mathrm{K})$, 其中 $t=2p^v$. 又设 $l=\frac{t}{2}$. 考察 $\mathbb{Z}$- 次数知 $\phi(x^{(k\varepsilon_m)})=c1$, 其中 $c\in\mathbb{F}$. 令 $\psi=\phi-c\mathrm{D}_m^l$, 则 $\psi(x^{(l\varepsilon_m)})=0$. 由引理 5.10 知 $\psi(x^{(k\varepsilon_m)})=0$, $\forall k\in\mathbb{N}$.

考察 $\mathbb{Z}$- 次数知 $\psi(x^{((l+1)\varepsilon_i)})=\psi(x_{i'}x^{(l\varepsilon_i)})=0$, 其中 $i\in J_0$. 因为

$$[x^{((l+1)\varepsilon_i)},x_ix^{(l\varepsilon_i)}]=\sigma(i)\binom{t}{p^v}x^{(t\varepsilon_i)},$$

并且 $\binom{t}{p^v}\not\equiv 0\pmod p$, 所以 $\psi(x^{(t\varepsilon_i)})=0$. 由引理 5.9 知 $\psi(x^{(k\varepsilon_m)})=0$, $\forall k\in\mathbb{N}$. 由引理 5.8 知 $\psi=0$. 所以 $\phi=c\mathrm{D}_m^l\in\operatorname{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D}_m^{p^v}\}$. □

定理 5.16 若 $n-m-3\not\equiv 0\pmod p$, 则

$$\operatorname{Der}(\mathrm{K})=\operatorname{ad}\mathrm{K}\oplus\operatorname{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D}_i^{p^{v_i}}\mid i\in Y_0,1\le v_i\le t_i-1\}.$$

由命题 5.6, 5.7, 5.13, 5.14 与 5.15 即可得到本定理. □

定理 5.17 若 $n-m-3\equiv 0\pmod p$, 则

$$\operatorname{Der}(\mathrm{K})=\operatorname{ad}\mathrm{K}\oplus\operatorname{span}_{\mathbb{F}}\{\operatorname{ad}(x^{(\pi)}x^E)\}\oplus\operatorname{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D}_i^{p^{v_i}}\mid i\in Y_0,1\le v_i\le t_i-1\}.$$

证明 由命题 5.6 知, 若 $\phi\in\operatorname{Der}_t(\mathrm{K})$, $t>-1$, 则 $\phi\in\operatorname{ad}(\Lambda(m,n,\underline{t}))=\operatorname{ad}\mathrm{K}\oplus\operatorname{span}_{\mathbb{F}}\{\operatorname{ad}(x^{(\pi)}x^E)\}$. 直接验证可知, $\operatorname{ad}(x^{(\pi)}x^E)(\mathrm{K})\subseteq\mathrm{K}$. 于是由 5.7, 5.13, 5.14 与 5.15 即可证得本定理. □

第三章　同态实现与不变滤过

§1　同 态 实 现

在本节中, 我们构造了任一李超代数到 W 型李超代数的同态, 从而将文献 [56] 的相应的李代数的方法与某些结果推广到李超代数.

本节总设 $\mathbb{F}$ 是特征数不为 2 的任一域. 令 $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的一个结合超代数, 并且仍用 A^- 表示与结合超代数 A 关联的李超代数 (见第一章例 1.7).

显然, 对于平凡的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化 (即 $\bar{1}$- 成分为零的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化), 域 $\mathbb{F}$ 是一个结合超代数. 设 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的一个李超代数, $U(L)$ 是 L 的泛包络代数, 则李超代数的平凡同态 $L \to \mathbb{F}$ 可以惟一地扩张为结合超代数的同态 $\varepsilon : U(L) \to \mathbb{F}$. $U(L)$ 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化诱导了 $U(L) \otimes U(L)$ 的一个 $\mathbb{Z}_2$- 阶化, 使得 $U(L) \otimes U(L)$ 是一个结合超代数, 其乘法运算由下式定义:

$$(x_1 \otimes x_2)(y_1 \otimes y_2) := (-1)^{\mathrm{d}(x_2)\mathrm{d}(y_1)} x_1 y_1 \otimes x_2 y_2,$$

$x_2, y_1 \in \mathrm{hg}(U(L))$, $x_1, y_2 \in U(L)$. 易见, 映射

$$\begin{aligned} L &\longrightarrow (U(L) \otimes U(L))^-, \\ z &\longmapsto z \otimes 1 \, + \, 1 \otimes z \end{aligned}$$

是李超代数的同态. 利用 $U(L)$ 的泛性可知, 存在惟一的结合超代数的同态 $\Delta : U(L) \to U(L) \otimes U(L)$, 使得 $\Delta(z) = z \otimes 1 \, + \, 1 \otimes z$, $\forall z \in L$.

乘法映射 $u' : U(L) \times U(L) \to U(L)$ 诱导了一个线性映射 $u : U(L) \otimes U(L) \to U(L)$, 使得 $u(x \otimes y) = xy$, $\forall x, y \in U(L)$. 则,$\varepsilon u : U(L) \otimes U(L) \to \mathbb{F}$ 是一个结合超代数的同态. 因为

$$\varepsilon u \Delta(z) = \varepsilon u(z \otimes 1 \, + \, 1 \otimes z) = \varepsilon(2z) = 0 = \varepsilon(z), \quad \forall z \in L,$$

所以我们有 $\varepsilon u \Delta(x) = \varepsilon(x)$, $\forall x \in U(L)$.

设 $L_{(0)}$ 是 L 的子代数, 使得 $\Delta(R) \subseteq R \otimes R$, 这里 R 是 $L_{(0)}$ 的泛包络代数. 则 $U(L)$ 是自由的左 R- 模. 令 $(u_i)_{i \in \Lambda}$ 是 $U(L)$ 的一个 R- 基底. 定义

$$U_R^{(*)} = \{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U(L), \mathbb{F}) \mid \text{仅有有限个} i \in \Lambda, \text{使得} f(u_i) \neq 0 \}.$$

设

$$U_R^* = \mathrm{span}_{\mathbb{F}} \{ f \in U_R^{(*)} \mid f(rx) = (-1)^{\mathrm{d}(f)\mathrm{d}(r)} \varepsilon(r) f(x) \},$$

其中 $r \in R$, $x \in U(L)$. 任取 $f, g \in U_R^*$, 我们定义线性映射 $f \otimes g : U(L) \otimes U(L) \to \mathbb{F}$, 使得

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = (-1)^{\mathrm{d}(g)\mathrm{d}(x)} f(x) g(x), \quad x, y \in U(L).$$

引理 1.1 $(f\otimes g)\Delta\in U_R^*,\ \forall f,g\in U_R^*$.

证明 设 $r\in R$. 由于 $\Delta(R)\subseteq R\otimes R$, 故可设

$$\Delta(r)=\sum_j r_j\otimes r'_j,$$

其中 $r_j,r'_j\in R$. 则

$$\varepsilon(r)=\varepsilon u\Delta(r)=\sum_j \varepsilon(r_j)\varepsilon(r'_j).$$

任取 $x\in U(L)$. 设 $\Delta(x)=\sum_i x_i\otimes x'_i$, 其中 $x_i,x'_i\in U(L)$, 则有

$$\begin{aligned}(f\otimes g)\Delta(rx) &= (f\otimes g)(\Delta(r)\Delta(x))\\ &= (f\otimes g)\left(\left(\sum_j r_j\otimes r'_j\right)\left(\sum_i x_i\otimes x'_i\right)\right)\\ &= \sum_{i,j}(-1)^{\mathrm{d}(r'_j)\mathrm{d}(x_i)}(f\otimes g)(r_jx_i\otimes r'_jx'_i)\\ &= \sum_{i,j}(-1)^{\mathrm{d}(r'_j)\mathrm{d}(x_i)+\mathrm{d}(g)(\mathrm{d}(r_j)+\mathrm{d}(x_i))}f(r_jx_i)g(r'_jx'_i)\\ &= \sum_{i,j}(-1)^{\theta}\varepsilon(r_j)f(x_i)\varepsilon(r'_j)g(x'_i)\\ &= \sum_{i,j}(-1)^{\theta}\varepsilon(r_j)\varepsilon(r'_j)f(x_i)g(x'_i),\end{aligned}\tag{1.1}$$

其中 $\theta=(-1)^{\mathrm{d}(r_j)\mathrm{d}(x_i)-\mathrm{d}(g)(\mathrm{d}(r_j)+\mathrm{d}(x_i))+\mathrm{d}(f)\mathrm{d}(r_j)+\mathrm{d}(g)\mathrm{d}(r'_j)}$. 若 $\mathrm{d}(r'_j)=\bar{0}$, 显然有

$$\varepsilon(r'_j)=(-1)^{(\mathrm{d}(f)+\mathrm{d}(x_i))\mathrm{d}(r'_j)}\varepsilon(r'_j).\tag{1.2}$$

若 $\mathrm{d}(r'_j)=\bar{1}$, 则 $\varepsilon(r'_j)=0$. 于是 (1.2) 式仍成立. 将 (1.2) 式代入 (1.1) 式, 则有

$$\begin{aligned}(f\otimes g)\Delta(rx) &= \sum_{i,j}(-1)^{\theta+(\mathrm{d}(f)+\mathrm{d}(x_i))\mathrm{d}(r'_j)}\varepsilon(r_j)\varepsilon(r'_j)f(x_i)g(x'_i)\\ &= \sum_{i,j}(-1)^{(\mathrm{d}(g)+\mathrm{d}(f))\mathrm{d}(r)+\mathrm{d}(g)\mathrm{d}(x_i)}\varepsilon(r_j)\varepsilon(r'_j)f(x_i)g(x'_i)\\ &= (-1)^{(\mathrm{d}(f)+\mathrm{d}(g))\mathrm{d}(r)}\left(\sum_j\varepsilon(r_j)\varepsilon(r'_j)\right)(f\otimes g)\left(\sum_i x_i\otimes x'_i\right)\\ &= (-1)^{(\mathrm{d}(f)+\mathrm{d}(g))\mathrm{d}(r)}\varepsilon(r)(f\otimes g)\Delta(x).\end{aligned}$$

所以 $(f\otimes g)\Delta\in U_R^*$. □

利用引理 1.1, 我们可以给 U_R^* 定义一个乘法:

$$fg:=(f\otimes g)\Delta,\ f,g\in U_R^*,$$

则 U_R^* 是一个超代数.

设 $x \in U(L), f \in U_R^*$. 我们定义线性映射 $x \cdot f : U(L) \to \mathbb{F}$, 使得

$$(x \cdot f)(y) = (-1)^{\mathrm{d}(x)(\mathrm{d}(f)+\mathrm{d}(y))} f(yx), \ y \in U(L).$$

直接验证可知 $x \cdot f \in U_R^*$, 并且线性映射

$$\begin{aligned} \phi : U(L) &\longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(U_R^*) \\ x &\longmapsto \phi_x \end{aligned}$$

是结合超代数的同态, 这里 $\phi_x(f) := x \cdot f$, $\forall f \in U_R^*$.

引理 1.2 设 ϕ 是如上定义的线性映射, 则 $\phi(L) \subseteq \mathrm{Der}\,(U_R^*)$, 并且 $\phi\big|_L : L \to \mathrm{Der}\,(U_R^*)$ 是李超代数的同态.

证明 设 $z \in L$, $f, g \in U_R^*$, $x \in U(L)$. 设

$$\Delta(x) = \sum_i x_i \otimes x_i', \ x_i, x_i' \in U(L).$$

则有

$$\begin{aligned}
&\phi_z(fg)(x) \\
=& (-1)^{\mathrm{d}(z)\big(\mathrm{d}(f)+\mathrm{d}(g)+\mathrm{d}(x)\big)}(fg)(xz) \\
=& (-1)^{\mathrm{d}(z)\big(\mathrm{d}(f)+\mathrm{d}(g)+\mathrm{d}(x)\big)}(f \otimes g)\Delta(xz) \\
=& (-1)^{\mathrm{d}(z)\big(\mathrm{d}(f)+\mathrm{d}(g)+\mathrm{d}(x)\big)}(f \otimes g)\left(\left(\sum_i x_i \otimes x_i'\right)(z \otimes 1 + 1 \otimes z)\right) \\
=& \sum_i (-1)^{\mathrm{d}(z)\big(\mathrm{d}(f)+\mathrm{d}(g)+\mathrm{d}(x)\big)+\mathrm{d}(x_i')\mathrm{d}(z)}(f \otimes g)(x_i z \otimes x_i') \\
&+ \sum_i (-1)^{\mathrm{d}(z)\big(\mathrm{d}(f)+\mathrm{d}(g)+\mathrm{d}(x)\big)}(f \otimes g)(x_i \otimes x_i' z) \\
=& \sum_i (-1)^{\mathrm{d}(z)\big(\mathrm{d}(f)+\mathrm{d}(x)\big)+\mathrm{d}(x_i')\mathrm{d}(z)+\mathrm{d}(g)\mathrm{d}(x_i)} f(x_i z) g(x_i') \\
&+ \sum_i (-1)^{\mathrm{d}(z)\big(\mathrm{d}(f)+\mathrm{d}(g)+\mathrm{d}(x)\big)+\mathrm{d}(g)\mathrm{d}(x_i)} f(x_i) g(x_i' z) \\
=& \sum_i (-1)^{\mathrm{d}(z)\mathrm{d}(x)+\mathrm{d}(x')\mathrm{d}(z)+\mathrm{d}(g)\mathrm{d}(x_i)+\mathrm{d}(z)\mathrm{d}(x_i)}\big(z \cdot f(x_i)\big) g(x_i') \\
&+ \sum_i (-1)^{\mathrm{d}(z)\big(\mathrm{d}(f)+\mathrm{d}(x)\big)+\mathrm{d}(g)\mathrm{d}(x_i)+\mathrm{d}(z)\mathrm{d}(x_i')} f(x_i)\big(z \cdot g(x_i')\big) \\
=& \sum_i (-1)^{\mathrm{d}(g)\mathrm{d}(x_i)}\big(\phi_z(f)(x_i)\big) g(x_i') \\
&+ \sum_i (-1)^{\mathrm{d}(z)\mathrm{d}(f)+\mathrm{d}(z)\mathrm{d}(x)+\mathrm{d}(g)\mathrm{d}(x_i)+\mathrm{d}(z)\mathrm{d}(x_i')} f(x_i)\phi_z(g)(x_i') \\
=& \sum_i \big(\phi_z(f) \otimes g\big)(x_i \otimes x_i') + \sum_i (-1)^{\mathrm{d}(z)\mathrm{d}(f)}\big(f \otimes \phi_z(g)\big)(x_i \otimes x_i')
\end{aligned}$$

$$= \big(\phi_z(f)\otimes g\big)\Delta(x) + (-1)^{\mathrm{d}(z)\mathrm{d}(f)}\big(f\otimes\phi_z(g)\big)\Delta(x)$$
$$= \big(\phi_z(f)g\big)(x) + (-1)^{\mathrm{d}(z)\mathrm{d}(f)}\big(f\phi_z(g)\big)x.$$

所以 $\phi_z(fg)=\phi_z(f)g+(-1)^{\mathrm{d}(\phi_z)\mathrm{d}(f)}f\phi_z(g)$. 因此 $\phi_z\in \mathrm{Der}\,(U_R^*)$, 即 $\phi(z)\in \mathrm{Der}\,(U_R^*)$, $\forall z\in L$. 故 $\phi(L)\subseteq \mathrm{Der}\,(U_R^*)$. 因为 $\phi: U(L)\to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(U_R^*)$ 是结合超代数的同态, 所以 $\phi\big|_L : L\to \mathrm{Der}\,(U_R^*)$ 是李超代数的同态. □

设 $L_{(0)}$ 是李超代数 L 的子代数, 并且

$$\dim(L/L_{(0)})_{\overline{0}}=m,\ \dim(L/L_{(0)})_{\overline{1}}=n.$$

我们可设

$$L=L_{(0)}\oplus\mathbb{F}e_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{F}e_m\oplus\mathbb{F}e_{m+1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{F}e_s,$$

其中 $s=m+n$, $e_1,\cdots,e_m\in L_{\overline{0}}$, $e_{m+1},\cdots,e_s\in L_{\overline{1}}$. 设 $U(L_{(0)})$ 是李超代数 $L_{(0)}$ 的泛包络代数, 为简便, 记 $R=U(L_{(0)})$. 若 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)\in\mathbb{N}_0^m$, 则令 $e^{(\beta)}=e_1^{\beta_1}e_2^{\beta_2}\cdots e_m^{\beta_m}$, 于是 $e^{(\beta)}\in U(L)$. 设 $v=\langle i_1,i_2,\cdots,i_k\rangle\in B(n)$, 这里 $B(n)$ 如第一章 §2 节所定义, 则 $\{v\}=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$, $|v|=k$. 令 $e^v=e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k}$, 则 $e^v\in U(L)$. 由李超代数的 PBW 定理知 $\{e^{(\beta)}e^v \mid \beta\in\mathbb{N}_0^m, v\in B(n)\}$ 是左 R- 模 $U(L)$ 的一个 R- 基底. 任取 $\alpha\in\mathbb{N}_0^m$, $u\in B(n)$, 定义线性映射 $x^{(\alpha)}x^u: U(L)\to\mathbb{F}$, 使得

$$x^{(\alpha)}x^u(re^{(\beta)}e^v)=(-1)^{\mathrm{d}(r)|u|}\varepsilon(r)\delta(\alpha,\beta)\delta(u,v),$$

其中 $r\in R$, $\delta(,)$ 是 Kronecker 符号函数. 由定义知, 若 $(\beta,v)\neq(\alpha,u)$, 则 $x^{(\alpha)}x^u(e^{(\alpha)}e^u)=0$. 所以 $\mathrm{d}(x^{(\alpha)}x^u)=\mathrm{d}(e^{(\alpha)}e^u)=\mathrm{d}(e^u)=\overline{|u|}\in\mathbb{Z}_2$.

引理 1.3 1) 设 $\alpha\in\mathbb{N}_0^m$, $u\in B(n)$. 则如上定义的线性映射 $x^{(\alpha)}x^u$ 是 U_R^* 中的元素.

2) $\{x^{(\alpha)}x^u \mid \alpha\in\mathbb{N}_0^m, u\in B(n)\}$ 是 U_R^* 的一个 $\mathbb{F}$- 基底.

证明 1) 由李超代数的 PBW 定理知, $U(L)$ 的标准基元素可表为 $re^{(\beta)}e^v$ 的形式, 其中 $r\in R$, $\beta\in\mathbb{N}_0^m$, $v\in B(n)$. 简记 $x^{(\alpha)}x^u$ 为 f. 任取 $r'\in R$, 则有

$$\begin{aligned}
&f\big(r'(re^{(\beta)}e^v)\big)\\
&=f\big((r'r)e^{(\beta)}e^v\big)\\
&=x^{(\alpha)}x^u\big((r'r)e^{(\beta)}e^v\big)\\
&=(-1)^{\mathrm{d}(r'r)|u|}\varepsilon(r'r)\delta(\alpha,\beta)\delta(u,v)\\
&=(-1)^{\mathrm{d}(r')|u|}\varepsilon(r')\big((-1)^{\mathrm{d}(r)|u|}\varepsilon(r)\delta(\alpha,\beta)\delta(u,v)\big)\\
&=(-1)^{\mathrm{d}(r')|u|}\varepsilon(r')\big(x^{(\alpha)}x^u(re^{(\beta)}e^v)\big)\\
&=(-1)^{\mathrm{d}(r')\mathrm{d}(f)}\varepsilon(r')f(re^{(\beta)}e^v).
\end{aligned}$$

所以 $f\in U_R^*$.

2) 设 $g \in \mathrm{hg}(U_R^*)$. 欲证 $g = \sum_{\alpha,u} g(e^{(\alpha)}e^u)x^{(\alpha)}x^u$. 任取 $U(L)$ 的一个基元素 $re^{(\beta)}e^v$, 其中 $r \in R$, $\beta \in \mathbb{N}_0^m$, $v \in B(n)$. 则有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha,u} g(e^{(\alpha)}e^u)x^{(\alpha)}x^u(re^{(\beta)}e^v) \\
&\quad = g(e^{(\beta)}e^v)(-1)^{\mathrm{d}(r)|v|}\varepsilon(r) \\
&\quad = (-1)^{\mathrm{d}(r)\overline{|v|}}\varepsilon(r)g(e^{(\beta)}e^v).
\end{aligned} \tag{1.3}$$

若 $g(e^{(\beta)}e^v) = 0$, 由 (1.3) 式, 则有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha,u} g(e^{(\alpha)}e^u)x^{(\alpha)}x^u(re^{(\beta)}e^v) \\
&\quad = 0 = (-1)^{\mathrm{d}(r)\mathrm{d}(g)}\varepsilon(r)g(e^{(\beta)}e^v) = g(re^{(\beta)}e^v).
\end{aligned}$$

若 $g(e^{(\beta)}c^v) \neq 0$, 则 $g(e^{(\beta)}e^v) \in \mathbb{F}_{\bar{0}}$, 故 $\mathrm{d}(g(e^{(\beta)}e^v)) = \bar{0}$. 于是 $\mathrm{d}(g) + \mathrm{d}(e^{(\beta)}e^v) = \bar{0}$. 所以 $\mathrm{d}(g) = \mathrm{d}(e^{(\beta)}e^v) = \mathrm{d}(e^v) = \overline{|v|}$. 由 (1.3) 式, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha,u} g(e^{(\alpha)}e^u)x^{(\alpha)}x^u(re^{(\beta)}e^v) \\
&\quad = (-1)^{\mathrm{d}(r)\mathrm{d}(g)}\varepsilon(r)g(e^{(\beta)}e^v) = g(re^{(\beta)}e^v).
\end{aligned}$$

所以 $g = \sum_{\alpha,u} g(e^{(\alpha)}e^u)x^{(\alpha)}x^u$. 易见 $\{x^{(\alpha)}x^u \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^m, u \in B(n)\}$ 是 $\mathbb{F}$- 线性无关的, 所以 $\{x^{(\alpha)}x^u \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^m, u \in B(n)\}$ 是 U_R^* 的一个 $\mathbb{F}$- 基底. □

引理 1.4 若 $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$, 则 $\Delta(e^{(\alpha)}) = \sum_{0\le\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}e^{(\beta)} \otimes e^{(\alpha-\beta)}$.

证明 设 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$, 则有

$$\begin{aligned}
\Delta(e^{(\alpha)}) &= \Delta\left(\prod_{j=1}^m e_j^{\alpha_j}\right) = \prod_{j=1}^m (\Delta e_j)^{\alpha_j} \\
&= \prod_{j=1}^m (e_j \otimes 1 + 1 \otimes e_j)^{\alpha_j} \\
&= (e_1 \otimes 1 + 1 \otimes e_1)^{\alpha_1} \cdots (e_m \otimes 1 + 1 \otimes e_m)^{\alpha_m} \\
&= \left(\sum_{0\le\beta_1\le\alpha_1}\binom{\alpha_1}{\beta_1}(e_1 \otimes 1)^{\beta_1}(1 \otimes e_1)^{\alpha_1-\beta_1}\right)\cdots \\
&\quad \left(\sum_{0\le\beta_m\le\alpha_m}\binom{\alpha_m}{\beta_m}(e_m \otimes 1)^{\beta_m}(1 \otimes e_m)^{\alpha_m-\beta_m}\right) \\
&= \sum_{0\le\beta\le\alpha}\left(\prod_{j=1}^m \binom{\alpha_j}{\beta_j}(e_j \otimes 1)^{\beta_j}(1 \otimes e_j)^{\alpha_j-\beta_j}\right) \\
&= \sum_{0\le\beta\le\alpha}\left(\prod_{j=1}^m \binom{\alpha_j}{\beta_j}(e_j^{\beta_j} \otimes e_j^{\alpha_j-\beta_j})\right) \\
&= \sum_{0\le\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}e^{(\beta)} \otimes e^{(\alpha-\beta)}.
\end{aligned}$$

□

设 $u,v\in B(n)$. 若 $\{u\}\cap\{v\}=\varnothing$, 则定义 $u+v=w\in B(n)$, 使得 $\{w\}=\{u\}\cup\{v\}$.

设 $u,v\in B(n)$. 若 $\{v\}\subseteq\{u\}$, 则记 $v\le u$. 约定 $\varnothing\le u$, $\forall u\in B(n)$. 如果 $v\le u$, 我们定义 $u-v=w\in B(n)$, 使得 $\{w\}=\{u\}\backslash\{v\}$. 若 $u=v$, 约定 $u-v=\phi$.

显然, 若 $u+v=w$, 则 $v+u=w$, 并且 $u=w-v$.

令 $Y_1=\{m+1,m+2,\cdots,s\}$, 其中 $s=m+n$. 设 $u_1,u_2,\cdots,u_k\in Y_1$ 并且 $u_1,u_2,\cdots,u_k$ 互不相同, 这里 $k\le n$. 则称 $u_1u_2\cdots u_k$ 为一个排列. 若 $u_1<u_2<\cdots<u_k$, 则称排列 $u_1,u_2,\cdots,u_k$ 为正规排列. 如果排列 $u_1u_2\cdots u_k$ 经过 r 次相邻数字的对换可化为正规排列, 则定义 $\mathrm{sgn}(u_1u_2\cdots u_k)=(-1)^r$. 易见 $\mathrm{sgn}(u_1u_2\cdots u_k)$ 是由排列 $u_1u_2\cdots u_k$ 惟一确定的.

定义 1.5 设 $v=\langle v_1,v_2,\cdots,v_t\rangle\in B(n)$, $u=\langle u_1,u_2,\cdots,u_k\rangle\in B(n)$, 并且 $\{u\}\cap\{v\}=\varnothing$. 则称 $\mathrm{sgn}(v_1\cdots v_tu_1\cdots u_k)$ 为 v 与 u 的反序符号, 并且记为 $\mathrm{sgn}(v,u)$.

引理 1.6 若 $u\in B(n)$, 则 $\Delta(e^u)=\sum_{v\le u}\mathrm{sgn}(v,u-v)e^v\otimes e^{u-v}$.

证明 对 $|u|$ 用归纳法. 当 $|u|=1$ 时, 可设 $e^u=e_i$, 其中 $i\in Y_1$. 则

$$\begin{aligned}\Delta(e^u) &= \Delta(e_i)=e_i\otimes 1+1\otimes e_i\\ &= \mathrm{sgn}(\varnothing,u)e^{\varnothing}\otimes e^u+\mathrm{sgn}(u,\varnothing)e^u\otimes e^{\varnothing}\\ &= \sum_{v\le u}\mathrm{sgn}(v,u-v)e^v\otimes e^{u-v},\end{aligned}$$

故 $|u|=1$ 时引理结论成立. 假设当 $|v|=r-1$ 时, 引理结论对 v 成立. 设 $u=\langle u_1,u_2,\cdots,u_r\rangle$. 令 $u'=u-\langle u_r\rangle$, 则有

$$\{v\in B(n)\mid v\le u\}=\{v\in B(n)\mid v\le u'\}\cup\{v+\langle u_r\rangle\mid v\le u'\}. \tag{1.4}$$

由归纳假设知

$$\Delta(e^{u'})=\sum_{v\le u'}\mathrm{sgn}(v,u'-v)e^v\otimes e^{u'-v}.$$

所以

$$\begin{aligned}\Delta(e^u) &= \Delta(e^{u'})\Delta(e_{u_r})\\ &= \left(\sum_{v\le u'}\mathrm{sgn}(v,u'-v)e^v\otimes e^{u'-v}\right)(1\otimes e_{u_r}+e_{u_r}\otimes 1)\\ &= \sum_{v\le u'}\mathrm{sgn}(v,u'-v)e^v\otimes e^{u'-v}e_{u_r}\\ &\quad+\sum_{v\le u'}\mathrm{sgn}(v,u'-v)(-1)^{|u'-v|}e^ve_{u_r}\otimes e^{u'-v}\\ &= \sum_{v\le u'}\mathrm{sgn}(v,u-v)e^v\otimes e^u\\ &\quad+\sum_{v\le u'}\mathrm{sgn}\big(v+\langle u_r\rangle,u-(v+\langle u_r\rangle)\big)e^{v+\langle u_r\rangle}\otimes e^{u-(v+\langle u_r\rangle)}.\end{aligned}$$

利用 (1.4) 式可得

$$\Delta(e^u) = \sum_{v \le u} \mathrm{sgn}(v, u - v) e^v \otimes e^{u-v}. \qquad \square$$

由引理 1.4 与 1.6 立即可得以下等式:

$$\begin{aligned} \Delta(e^{(\alpha)} e^u) =& \Delta(e^{(\alpha)}) \Delta(e^u) \\ =& \sum_{0 \le \beta \le \alpha,\ v \le u} \binom{\alpha}{\beta} \mathrm{sgn}(v, u - v) e^{(\beta)} e^v \otimes e^{(\alpha-\beta)} e^{u-v}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

我们仍简记 $x^{(\varepsilon_i)}$ 为 x_i, $i \in Y_0$. 若 $u = \langle i \rangle$, $i \in Y_1$, 也简记 x^u 为 x_i.

定理 1.7 超代数 U_R^* 同构于结合超代数 $\Lambda(m, n)$.

证明 令 $i, j \in Y_1$, $i < j$. 设 $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$, $u \in B(n)$, 并且 $\alpha \ne 0$. 任取 $r \in R$, 由 (1.5) 式知

$$\begin{aligned} & x_i x_j (r e^{(\alpha)} e^u) = \varepsilon(r) x_i x_j (e^{(\alpha)} e^u) = \varepsilon(r)(x_i \otimes x_j) \Delta(e^{(\alpha)} e^u) \\ = & \sum_{\substack{0 \le \beta \le \alpha \\ v \le u}} \varepsilon(r) \binom{\alpha}{\beta} \mathrm{sgn}(v, u - v)(-1)^{|v|} x_i (e^{(\beta)} e^v) x_j (e^{(\alpha-\beta)} e^{u-v}). \end{aligned}$$

因为 β 与 $\alpha - \beta$ 至少有一个不为零, 故 $x_i(e^{(\beta)} e^v)$ 与 $x_j(e^{(\alpha-\beta)} e^{u-v})$ 至少有一个是零, 所以 $x_i x_j (r e^{(\alpha)} e^u) = 0$. 同理 $x_j x_i (r e^{(\alpha)} e^u) = 0$. 因此

$$x_i x_j (r e^{(\alpha)} e^u) = -x_j x_i (r e^{(\alpha)} e^u). \tag{1.6}$$

任取 $u \in B(n)$, 由引理 1.6 知

$$\begin{aligned} x_i x_j (r e^u) &= \varepsilon(r) x_i x_j (e^u) \\ &= \varepsilon(r)(x_i \otimes x_j) \Delta(e^u) \\ &= \sum_{v \le u} \varepsilon(r) \mathrm{sgn}(v, u - v)(-1)^{|v|} x_i (e^v) x_j (e^{u-v}) \\ &= \begin{cases} 0, & u \ne \langle i, j \rangle, \\ \varepsilon(r), & u = \langle i, j \rangle. \end{cases} \end{aligned}$$

同理可推得

$$x_j x_i (r e^u) = \begin{cases} 0, & u \ne \langle i, j \rangle, \\ -\varepsilon(r), & u = \langle i, j \rangle. \end{cases}$$

所以

$$x_i x_j (r e^u) = -x_j x_i (r e^u). \tag{1.7}$$

由 (1.6) 与 (1.7) 式知, $x_i x_j = -x_j x_i$, $i, j \in Y_1$, $i < j$. 类似地, 我们可证得

$$x^{(\alpha)} x_i = x_i x^{(\alpha)}, \qquad \alpha \in \mathbb{N}_0^m,\ i \in Y_1;$$

$$x^{(\alpha)}x^{(\beta)}=\binom{\alpha+\beta}{\alpha}x^{(\alpha+\beta)},\qquad \alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^m.$$

因此 $U_R^*\cong\Lambda(m,n)$. □

由定理 1.7, 我们可以将 U_R^* 等同于 $\Lambda(m,n)$. 于是有

$$\mathrm{W}(m,n)=\left\{\sum_{i=1}^{s}f_i\mathrm{D}_i\;\middle|\;f_i\in U_R^*,\ \forall i\in Y\right\},$$

其中 $\mathrm{D}_i\in\mathrm{Der}(U_R^*)$, 并且满足第一章 (2.3) 式. 令

$$\mathcal{L}_\theta=\left\{D\in\mathrm{Der}_\theta(U_R^*)\mid D\text{ 满足下面的 (1.8) 式}\right\},$$

$$\begin{aligned}D(x^{(\alpha)}x^u)=&\sum_{i=1}^{m}(-1)^{\theta|u|}x^{(\alpha-\varepsilon_i)}x^uD(x^{(\varepsilon_i)})\\&+\sum_{i=m+1}^{s}(-1)^{(\theta+\bar{1})(|u|-1)}x^{(\alpha)}\partial_i(x^u)D(x_i),\end{aligned}\tag{1.8}$$

其中 $\theta\in\mathbb{Z}_2$.

引理 1.8 $\mathrm{W}(m,n)_\theta=\mathcal{L}_\theta,\quad\forall\theta\in\mathbb{Z}_2$.

证明 若 $D\in\mathcal{L}_\theta$, 由 (1.8) 式与第一章 (2.3) 式可推得

$$D(x^{(\alpha)}x^u)=\left(\sum_{i=1}^{m}D(x_i)\mathrm{D}_i+\sum_{i=m+1}^{s}D(x_i)\mathrm{D}_i\right)(x^{(\alpha)}x^u).$$

所以

$$D=\sum_{i=1}^{m}D(x_i)\mathrm{D}_i+\sum_{i=m+1}^{s}D(x_i)\mathrm{D}_i\in\mathrm{W}(m,n)_\theta.$$

反之, 设 $f\mathrm{D}_i\in\mathrm{W}(m,n)_\theta$, 其中 $f\in U_R^*$, $\theta\in\mathbb{Z}_2$. 若 $i\in Y_1$, 则 $\mathrm{d}(f)=\theta+\bar{1}$. 利用第一章 (2.3) 式可得

$$f\mathrm{D}_i(x^{(\alpha)}x^u)=(-1)^{(\theta+\bar{1})(|u|-1)}x^{(\alpha)}\partial_i(x^u)(f\mathrm{D}_i)(x_i).$$

因为 $(f\mathrm{D}_i)(x_j)=0$, $\forall j\in Y_0$. 所以, 由等式 (1.8) 知 $f\mathrm{D}_i\in\mathcal{L}_\theta$. 若 $i\in Y_1$, 同理可得 $f\mathrm{D}_i\in\mathcal{L}_\theta$. 因此 $\mathrm{W}(m,n)_\theta=\mathcal{L}_\theta$, $\forall\theta\in\mathbb{Z}_2$. □

设 t 是任意正整数, $i\in Y_0$, $y\in L$. 我们定义

$$\phi_y^t:=\phi_y\left(x^{(t\varepsilon_i)}\right)-x^{(t\varepsilon_i-\varepsilon_i)}\phi_y(x_i).$$

若 $j\in Y_1$, 由 (1.5) 式可得

$$\begin{aligned}&\phi_{e_j}^t(e^{(\alpha)}e^u)\\&=\left(\phi_{e_j}(x^{(t\varepsilon_i)})\right)(e^{(\alpha)}e^u)-\left(x^{((t-1)\varepsilon_i)}\phi_{e_j}(x_i)\right)(e^{(\alpha)}e^u)\\&=\left(e_j\cdot x^{(t\varepsilon_i)}\right)(e^{(\alpha)}e^u)-\left(x^{((t-1)\varepsilon_i)}\otimes(e_j\cdot x_i)\right)\Delta(e^{(\alpha)}e^u)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{|u|}x^{(t\varepsilon_i)}(e^{(\alpha)}e^u e_j)\\
&\quad -\sum_{\substack{0\le\beta\le\alpha\\ v\le u}}\binom{\alpha}{\beta}\operatorname{sgn}(v,u-v)\Big(x^{((t-1)\varepsilon_i)}(e^{\beta}e^{v})\Big)\Big(x_i\big(e^{(\alpha-\beta)}e^{u-v}e_j\big)\Big)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\phi_{e_j}^t = 0, \quad \forall j \in Y_1, \ \forall t \in \mathbb{N}. \tag{1.9}
$$

引理 1.9　设 $t \ge 2$. 若 $\phi_z^{t-1} = 0$, $\forall z \in L$, 则

$$
y_1 \cdot \phi_{y_2}^t - (-1)^{d(y_1)d(y_2)} y_2 \cdot \phi_{y_1}^t = \phi_{[y_1,y_2]}^t, \quad \forall y_1, y_2 \in L. \tag{1.10}
$$

证明　由 $\phi_z^{t-1} = 0$ 知, $\phi_z\Big(x^{((t-1)\varepsilon_i)}\Big) = x^{((t-2)\varepsilon_i)}\phi_z(x_i)$. 于是

$$
z \cdot x^{((t-1)\varepsilon_i)} = x^{((t-2)\varepsilon_i)}(z \cdot x_i), \quad \forall z \in L. \tag{1.11}
$$

利用 (1.11) 式以及 $\phi_{y_1}, \phi_{y_2} \in \mathrm{Der}(U_R^*)$ 可得

$$
\begin{aligned}
& y_1 \cdot \phi_{y_2}^t - (-1)^{\mathrm{d}(y_1)\mathrm{d}(y_2)} y_2 \cdot \phi_{y_1}^t\\
=\ & y_1 \cdot \Big(y_2 \cdot x^{(t\varepsilon_i)} - x^{((t-1)\varepsilon_i)}(y_2 \cdot x_i)\Big)\\
& -(-1)^{\mathrm{d}(y_1)\mathrm{d}(y_2)} y_2 \cdot \Big(y_1 \cdot x^{(t\varepsilon_i)} - x^{((t-1)\varepsilon_i)}(y_1 \cdot x_i)\Big)\\
=\ & [y_1, y_2] \cdot x^{(t\varepsilon_i)} - y_1 \cdot \Big(x^{((t-1)\varepsilon_i)}(y_2 \cdot x_i)\Big)\\
& +(-1)^{\mathrm{d}(y_1)\mathrm{d}(y_2)} y_2 \cdot \Big(x^{((t-1)\varepsilon_i)}(y_1 \cdot x_i)\Big)\\
=\ & [y_1, y_2] \cdot x^{(t\varepsilon_i)} - \Big(y_1 \cdot x^{((t-1)\varepsilon_i)}\Big)(y_2 \cdot x_i) - x^{((t-1)\varepsilon_i)}(y_1 \cdot y_2 \cdot x_i)\\
& +(-1)^{\mathrm{d}(y_1)\mathrm{d}(y_2)}\big(y_2 \cdot x^{((t-1)\varepsilon_i)}\big)(y_1 \cdot x_i)\\
& +(-1)^{\mathrm{d}(y_1)\mathrm{d}(y_2)} x^{((t-1)\varepsilon_i)}\big(y_2 \cdot y_1 \cdot x_i\big)\\
=\ & [y_1, y_2] \cdot x^{(t\varepsilon_i)} - x^{((t-2)\varepsilon_i)}(y_1 \cdot x_i)(y_2 \cdot x_i)\\
& -x^{((t-1)\varepsilon_i)}\big([y_1, y_2] \cdot x_i\big) + (-1)^{\mathrm{d}(y_1)\mathrm{d}(y_2)} x^{((t-2)\varepsilon_i)}(y_2 \cdot x_i)\\
=\ & [y_1, y_2] \cdot x^{(t\varepsilon_i)} - x^{((t-1)\varepsilon_i)}\big([y_1, y_2] \cdot x_i\big)\\
=\ & \phi_{[y_1,y_2]}^t, \quad \forall y_1, y_2 \in L. \qquad \square
\end{aligned}
$$

令 $U_{(k)} = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\Big\{ \prod_{j=1}^{l} x_j \mid x_j \in L, \ l \le k \Big\}$. 则

$$
U_{(0)} \subseteq U_{(1)} \subseteq U_{(2)} \subseteq \cdots
$$

是 $U(L)$ 的子空间的升链. 任取 $x \in U(L)$, 易见, 存在 $i \in \mathbb{N}_0$, 使得 $x \in U_{(i)}$. 若 $\phi_y^t(U_{(r-1)}) = 0$, $\forall y \in L$, 任取 $y_1, \cdots, y_r \in L$, 利用关系式

$$
y_{j-1}y_j = [y_{j-1}, y_j] + (-1)^{\mathrm{d}(y_{j-1})\mathrm{d}(y_j)} y_j y_{j-1}, \quad j = 2, \cdots, r
$$

我们可以推得以下等式:

$$\phi_y^t(y_1\cdots y_i\cdots y_r)=(-1)^{\mathrm{d}(y_i)\left(\mathrm{d}(y_1)+\cdots+\mathrm{d}(y_{i-1})\right)}\phi_y^t(y_iy_1\cdots y_{i-1}y_{i+1}\cdots y_r),\tag{1.12}$$

其中 $2\le i\le r$;

$$\phi_y^t(y_1\cdots y_i\cdots y_r)=(-1)^{\mathrm{d}(y_i)\left(\mathrm{d}(y_{i+1})+\cdots+\mathrm{d}(y_r)\right)}\phi_y^t(y_1\cdots y_{i-1}y_{i+1}\cdots y_ry_i),\tag{1.13}$$

其中 $1\le i\le r-1$.

引理 1.10 设 $t\ge 2$. 如果 $\phi_y^t=0$ 以及 $\phi_y^t(U_{(k-2)})=0,\ \forall y\in L$, 则

$$\phi_{y_1}^t(y_2y_3\cdots y_k)=(-1)^{d(y_1)d(y_2)}\phi_{y_2}^t(y_1y_3\cdots y_k),$$

其中 $y_i\in L,\ i=1,2,\cdots,k$.

证明 利用等式 (1.10) 与 $\phi_{[y_1,y_2]}^t(U_{(k-2)})=0$, 可得

$$y_2\cdot\phi_{y_1}^t(y_3\cdots y_k)=(-1)^{\mathrm{d}(y_1)\mathrm{d}(y_2)}y_1\cdot\phi_{y_2}^t(y_3\cdots y_k).\tag{1.14}$$

利用 (1.13), (1.14) 与 (1.10) 式, 有

$$\begin{aligned}\phi_{y_1}^t(y_2y_3\cdots y_k)&=(-1)^{\mathrm{d}(y_2)\left(\mathrm{d}(y_3)+\cdots+\mathrm{d}(y_k)\right)}\phi_{y_1}^t(y_3\cdots y_ky_2)\\&=(-1)^{\mathrm{d}(y_2)\mathrm{d}(y_1)}y_2\cdot\phi_{y_1}^t(y_3\cdots y_k)\\&=y_1\cdot\phi_{y_2}(y_3\cdots y_k)\\&=(-1)^{\mathrm{d}(y_1)\left(\mathrm{d}(y_3)+\cdots+\mathrm{d}(y_k)\right)}\phi_{y_2}^t(y_3\cdots y_ky_1)\\&=(-1)^{\mathrm{d}(y_1)\mathrm{d}(y_2)}\phi_{y_2}^t(y_1y_3\cdots y_k).\qquad\square\end{aligned}$$

引理 1.11 $\phi_y^t=0,\ \forall y\in L,\ \forall t\in\mathbb{N}$.

证明 由 (1.3) 式与 (1.9) 式, 我们只需证明 $\phi_y^t=0$, 其中 $y\in L_{(0)}\cup\{e_l\mid l\in Y_0\}$. 下面对 t 用归纳法证明 $\phi_y^t=0$. 显然 $\phi_y^1=0$. 假设 $\phi_y^{t-1}=0$. 我们对 k 归纳证明 $\phi_y^t(U_{(k)})=0$. 假设 $\phi_y^t(U_{(k-1)})=0$.

(i) 设 $y\in L_{(0)},\ e^{(\alpha)}e^u\in U_{(k)}$. 若 $\alpha\ne 0$, 我们令 $i=\min\{j\in Y_0\mid\alpha_j\ne 0\}$. 由引理 1.10 与 $\varepsilon(y)=0$ 可得

$$\phi_y^t\left(e^{(\alpha)}e^u\right)=\phi_{e_i}^t\left(ye^{(\alpha-\varepsilon_i)}e^u\right)=\varepsilon(y)\phi_{e_i}^t\left(e^{(\alpha-\varepsilon_i)}e^u\right)=0.$$

若 $\alpha=0$, 则 $\phi_y^t(e^u)=\phi_{e_{u_1}}^t\left(ye^{u-\langle u_1\rangle}\right)=0$. 所以 $\phi_y^t(U_k)=0$.

(ii) 设 $y=e_l$, 其中 $l\in Y_0$. 令 $e^{(\alpha)}e^u\in U_{(k)}$. 若 $u\ne\varnothing$, 由 (1.12) 式, 引理 1.10 与 (1.9) 式可得

$$\phi_{e_l}^t\left(e^{(\alpha)}e^u\right)=\phi_{e_l}^t\left(e_{u_1}e^{(\alpha)}e^{u-\langle u_1\rangle}\right)=\phi_{e_{u_1}}^t\left(e_le^{(\alpha)}e^{u-\langle u_1\rangle}\right)=0.$$

如果 $u=\varnothing$, 由于 $\phi_{e_l}^t(1)=0$, 故可设 $\alpha\ne 0$. 令

$$r=\max\{i\in Y_0\mid\alpha_i\ne 0\},\quad j=\max\{r,l\},\quad \beta=\alpha+\varepsilon_l-\varepsilon_j.$$

若 $j=l$, 则 $\phi_{e_l}^t(e^{(\alpha)})=\phi_{e_j}^t(e^{(\beta)})$. 若 $j=r$, 由 (1.12) 式, 引理 1.10 与 (1.13) 式可得

$$\begin{aligned}\phi_{e_l}^t(e^{(\alpha)}) &= \phi_{e_l}^t(e_r e^{(\alpha-\varepsilon_r)})\\ &= \phi_{e_r}^t(e_l e^{(\alpha-\varepsilon_r)})\\ &= \phi_{e_r}^t(e^{(\alpha+\varepsilon_l-\varepsilon_r)})\\ &= \phi_{e_j}^t(e^{(\beta)}).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\phi_{e_l}^t(e^{(\alpha)}) &= \phi_{e_j}^t(e^{(\beta)})\\ &= (e_j\cdot x^{(t\varepsilon_i)})(e^{(\beta)})-(x^{((t-1)\varepsilon_i)}\otimes(e_j\cdot x_i))\Delta(e^{(\beta)})\\ &= \delta(t\varepsilon_i,\beta+\varepsilon_j)-\sum_{0\le\gamma\le\beta}\binom{\beta}{\gamma}\delta(t\varepsilon_i-\varepsilon_i,\ \gamma)\delta(\varepsilon_i,\ \beta-\gamma+\varepsilon_j),\end{aligned}$$

其中 $\delta(\ ,\ )$ 是 Kronecker 符号函数. 若 $i\neq j$, 则上式为零.

设 $i=j$. 若 $\beta\neq t\varepsilon_i-\varepsilon_i$, 则 $\delta(t\varepsilon_i,\ \beta+\varepsilon_i)=0$. 易见, $\delta(t\varepsilon_i-\varepsilon_i,\ \gamma)$ 与 $\delta(\varepsilon_i,\ \beta-\gamma+\varepsilon_i)$ 至少有一个是零. 所以 $\phi_{e_l}^t(e^{(\alpha)})=0$. 若 $\beta=t\varepsilon_i-\varepsilon_i$, 则

$$\delta(t\varepsilon_i,\ \beta+\varepsilon_i)=1=\sum_{0\le\gamma\le\beta}\binom{\beta}{\gamma}\delta(t\varepsilon_i-\varepsilon_i,\ \gamma)\delta(\varepsilon_i,\ \beta-\gamma+\varepsilon_i).$$

于是 $\phi_{e_l}^t(e^{(\alpha)})=0$, 从而 $\phi_{e_l}^t(U_k)=0$.

由 (i) 与 (ii), 归纳法完成, 引理得证. □

定理 1.12 设 $L_{(0)}$ 是李超代数 L 的子代数, 并且 $\dim(L/L_{(0)})_{\bar{0}}=m$, $\dim(L/L_{(0)})_{\bar{1}}=n$. 则存在李超代数的同态 $\phi: L\to \mathrm{W}(m,n)$, 使得 $\ker(\phi)\subseteq L_{(0)}$. 特别地, 若 $L_{(0)}$ 不包含 L 的任何非零理想, 则 L 同构于 $\mathrm{W}(m,n)$ 的一个子代数.

证明 由已知, 可将 L 表为

$$L=L_{(0)}\oplus\mathbb{F}e_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{F}e_m\oplus\mathbb{F}e_{m+1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{F}e_s, \tag{1.15}$$

其中 $s=m+n$, $e_1,\cdots,e_m\in L_{\bar{0}}$, $e_{m+1},\cdots,e_s\in L_{\bar{1}}$. 令 $R=U(L_{(0)})$, $\phi: L\longrightarrow \mathrm{Der}(U_R^*)$ 为引理 1.2 中定义的李超代数的同态. 任取 $y\in L_\theta$, 其中 $\theta\in\mathbb{Z}_2$, 则 $\mathrm{d}(\phi_y)=\theta$. 下面证明 $\phi_y\in \mathrm{W}(m,n)_\theta$.

设 $\alpha\in\mathbb{N}_0^m$, $u=\langle u_1,\cdots,u_r\rangle\in B(n)$. 由引理 1.11 知

$$\phi_y(x^{(\alpha_i\varepsilon_i)})=x^{((\alpha_i-1)\varepsilon_i)}\phi_y(x_i).$$

则有

$$\phi_y(x^{(\alpha)}x^u)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\phi_y(\prod_{k=1}^{m} x^{(\alpha_k\varepsilon_k)})\right) x^u + x^{(\alpha)}\left(\phi_y(\prod_{k=1}^{r} x_{u_k})\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(\prod_{k=1}^{i-1} x^{(\alpha_k\varepsilon_k)}\right)\phi_y(x^{(\alpha_i\varepsilon_i)})\left(\prod_{k=i+1}^{m} x^{(\alpha_k\varepsilon_k)}\right)x^u \\
&\quad + \sum_{i=1}^{r}(-1)^{\theta(i-1)}x^{(\alpha)}\left(\prod_{k=1}^{i-1} x_{u_k}\right)\phi_y(x_{u_i})\left(\prod_{k=i+1}^{r} x_{u_k}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m}(-1)^{\theta|u|}x^{(\alpha-\varepsilon_i)}x^u\phi_y(x_i) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{r}(-1)^{\theta(i-1)+(\theta+\bar{1})(|u|-i)}x^{(\alpha)}\left(\prod_{k=1}^{i-1} x_{u_k}\right)\left(\prod_{k-i+1}^{r} x_{u_k}\right)\phi_y(x_{u_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{m}(-1)^{\theta|u|}x^{(\alpha-\varepsilon_i)}x^u\phi_y(x_i) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{r}(-1)^{(\theta+\bar{1})(|u|-1)}x^{(\alpha)}\partial_i(x^u)\phi_y(x_{u_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{m}(-1)^{\theta|u|}x^{(\alpha\ \ \varepsilon_i)}x^u\phi_y(x_i) \\
&\quad + \sum_{i=m+1}^{s}(-1)^{(\theta+\bar{1})(|u|+1)}x^{(\alpha)}\partial_{u_i}(x^u)\phi_y(x_{u_i}).
\end{aligned}
$$

所以 $\phi_y \in L_\theta$. 由引理 1.8, $\phi_y \in \mathrm{W}(m,n)_\theta$, 故 $\phi(L) \subseteq \mathrm{W}(m,n)$.

若 $y \in \ker\phi$, 则 $\phi_y = 0$. 所以 $x_i(y) = \big(\phi_y(x_i)\big)(1) = 0$, 其中 $i \in Y_0$. 同理知, $x_i(y) = 0$, $\forall i \in Y_1$. 由 (1.15) 式可知 $y \in L_{(0)}$. 所以 $\ker\phi \subseteq L_{(0)}$. □

§2 W 与 S 的自然滤过

设 $L = \mathrm{W}$ 或 S. 在本节中, 我们将证明 L 的自然滤过是不变的; 进而给出并证明了 L 与 L' 同构的充要条件. 为此, 我们需要作一些准备.

设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化空间, 令

$$0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_t = V \tag{2.1}$$

是 V 的子空间的一个升链. 我们约定: 当 $n \geq t$ 时, $V_n = V$; 当 $n \leq 0$ 时, $V_n = 0$. 任取 $k \in \mathbb{Z}$, 令

$$M_k = \big\{f \in \mathrm{pl}(V) \mid f(V_i) \subseteq V_{i+k},\ \forall i \in \mathbb{Z}\big\}.$$

易见, 若 $k \leq l$, 则 $M_k \subseteq M_l$. 并且 $M_{-t} = 0$, $M_{t-1} = \mathrm{pl}(V)$, $[M_{-1}, M_k] \subseteq M_{k-1}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

设 S 是 $\mathrm{pl}(V)$ 的子集, 若存在 V 的形如 (2.1) 的子空间的升链, 使得 $f(V_i) \subseteq V_{i-1}$, $\forall f \in S$, $i = 1, \cdots, t$, 则称 S 关于升链 (2.1) 是严格上三角的, 或简称 S 在 V 上是严格上三角的.

设 S 是 $\mathrm{pl}(V)$ 的子集, 若对任意 $x,y\in S$, 均有 $[x,y]\in S$, 则称 S 是 $\mathrm{pl}(V)$ 的一个李超子集. 显然此时 $\mathrm{span}_{\mathbb{F}}S$ 是一个李超代数. 若子集 S 是严格上三角的, 则 $\mathrm{span}_{\mathbb{F}}S$ 亦然. 如果 $\mathrm{pl}(V)$ 的子集 S 的每个元素都是 V 的幂零线性变换, 则称 S 是诣零的. 以下命题的证明方法取自于文献 [56] 对李代数的相应问题的证法.

命题 2.1　*设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化空间, S 是 $\mathrm{pl}(V)$ 的一个李超子集. 若 S 是诣零的, 并且 $L:=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}S$ 是有限维的, 则 L 在 V 上是严格三角的.*

证明　我们分四步证明本命题.

(i) 令 $\Omega=\{R\subseteq S\mid R是严格上三角的李超子集\}$. 则 Ω 包含一个极大元素.

显然 Ω 是一个部分序集, 并且 Ω 非空. 若 $(R_i)_{i\in I}$ 是 Ω 的一个升链, 则 $(\mathrm{span}_{\mathbb{F}}R_i)_{i\in I}$ 是 $\mathrm{pl}(V)$ 的子空间的一个升链. 因为 L 是有限维的, 所以存在 $i_0\in I$, 使得 $\cup_{i\in I}(\mathrm{span}_{\mathbb{F}}R_i)\subseteq \mathrm{span}_{\mathbb{F}}R_{i_0}$, 从而 $\cup_{i\in I}R_i\subseteq\mathrm{span}_{\mathbb{F}}R_{i_0}$. 因为 $\mathrm{span}_{\mathbb{F}}R_{i_0}$ 是严格上三角的, 从而 $\cup_{i\in I}R_i$ 是严格上三角的, 于是 $\cup_{i\in I}R_i\in\Omega$. 故 Ω 的每个全序子集均有上界. 由 Zorn 引理知, Ω 有极大元素.

(ii) 设 $R\in\Omega,\ s\in S$. 若 $[s,r]\in R,\ \forall r\in R$, 则 $R\cup\{s\}\in\Omega$.

因为 R 是严格上三角的, 故有 V 的子空间升链 $0=V_0\subseteq V_1\subseteq\cdots\subseteq V_t=V$, 使得 $r(V_i)\subseteq V_{i-1},\ \forall r\in R,\ 1\leq i\leq t$. 令

$$W_0=W,\quad W_{i+1}=\{v\in V\mid r(v)\in W_i,\quad \forall r\in R\}.$$

显然 $s(W_0)\subseteq W_0$. 假设 $s(W_i)\subseteq W_i$. 任取 $v\in W_{i+1}$, 则

$$r(s(v))=[r,s](v)+(-1)^{\mathrm{d}(r)\mathrm{d}(s)}s(r(v)).\tag{2.2}$$

由 $[r,s]\in R$ 以及 W_{i+1} 的定义知 $[r,s](v)\in W_i$. 因为 $r(v)\in W_i,\ s(W_i)\subseteq W_i$, 故 $s(r(v))\in W_i$. 由 (2.2) 式知, $r(s(v))\in W_i$, 于是 $s(v)\in W_{i+1}$. 故 $s(W_{i+1})\subseteq W_{i+1}$. 这就证明了 $s(W_i)\subseteq W_i,\ i=0,1,\cdots,t+1$.

对 i 用归纳法容易证得

$$V_i\subseteq W_i,\ W_i\subseteq W_{i+1}, i=0,1,\cdots,t.$$

由已知, s 是幂零线性变换, 故可设 $s^k=0$. 令

$$W_{ij}=s^j(W_i)+W_{i-1},\ 1\leq j\leq k,\ 1\leq i\leq t.$$

于是有

$$W_{ij}=s^j(W_i)+W_{i-1}=s^{j-1}(s(W_i))+W_{i-1}\subseteq s^{j-1}(W_i)+W_{i-1}=W_{i,j-1},$$

$$W_{i+1,k}=s^k(W_{i+1})+W_i=W_i,$$

$$W_{i0}=s^0(W_i)+W_{i-1}=W_i+W_{i-1}=W_i=W_{i+1,k}\subseteq W_{i+1,k-1}.\tag{2.3}$$

所以我们有子空间的升链

$$\begin{aligned}0 = W_{1\,k} \subseteq W_{1\,k-1} \subseteq \cdots \subseteq W_{10} \subseteq W_{2\,k-1} \subseteq \cdots \subseteq W_{2\,0} \\ \subseteq W_{3\,k-1} \subseteq \cdots \subseteq W_{t-1\,0} \subseteq W_{t\,k-1} \subseteq \cdots \subseteq W_{t\,0} = V.\end{aligned} \tag{2.4}$$

易见

$$\begin{aligned}s(W_{ij-1}) = s\big(s^{j-1}(W_i) + W_{i-1}\big) = s^j(W_i) + s(W_{i-1}) \\ \subseteq s^j(W_i) + W_{i-1} = W_{ij}, \quad i = 1, \cdots, t, \quad j = k, k-1, \cdots, 1.\end{aligned}$$

特别地, $s(W_{ik-1}) \subseteq W_{ik}$. 由 (2.3) 式知 $W_{i-1\,0} = W_{ik}$, 所以

$$s(W_{ik-1}) \subseteq W_{i-1\,0}, \quad i = 2, \cdots, t.$$

对任意 $r \in R$, 有

$$r(W_{i\,j-1}) = r\big(s^{j-1}(W_i) + W_{i-1}\big) = r\big(s^{j-1}(W_i)\big) + r(W_{i-1}).$$

由于 $s(W_i) \subseteq W_i$, 故 $r(s^{j-1}(W_i)) \subseteq r(W_i) \subseteq W_{i-1}$. 又因为 $r(W_{i-1}) \subseteq W_{i-2}$, 所以

$$r(W_{i\,j-1}) \subseteq W_{i-1} + W_{i-2} = W_{i-1} \subseteq W_{ij}.$$

特别地, $r(W_{ik-1}) \subseteq W_{ik} = W_{i-1\,0}$. 于是我们证明了 $R \cup \{s\}$ 关于升链 (2.4) 是严格上三角的, 故 $R \cup \{s\} \in \Omega$.

(iii) 若 $R \in \Omega$, 并且 $R \neq S$, 则存在 $s \in S \backslash R$, 使得 $[s, r] \in R$, $\forall r \in R$.

由已知, 有 V 的子空间的升链 $0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots V_t = V$, 使得 $r(V_i) \subseteq V_{i-1}$, $\forall r \in R$, $i = 1, \cdots, t$. 因为 $\mathrm{pl}(V) = M_{t-1}$, 故 $R \cap M_{t-1} \neq S \cap M_{t-1}$. 由 $M_{-t} = 0$ 知 $R \cap M_{-t} = S \cap M_{-t}$. 令

$$i_0 = \min\{i \mid R \cap M_i \subsetneqq S \cap M_i\}$$

显然 $-t < i \leq t-1$. 设 $s \in (S \cap M_{i_0}) \backslash (R \cap M_{i_0})$, 则

$$[s, r] \in [M_{i_0}, M_{-1}] \subseteq M_{i_0 - 1}.$$

因为 S 是一个李超子集, 并且 $r \in R \subseteq S$, 所以 $[s, r] \in S$. 于是 $[s, r] \in S \cap M_{i_0-1} = R \cap M_{i_0-1}$, 因此 $[s, r] \in R$.

(iv) 由 (i) 知 Ω 有极大元素. 设 R_0 是 Ω 的一个极大元素. 若 $R_0 \neq S$, 由 (iii) 知存在 $s \in S \backslash R_0$, 使得 $[s, r] \in R_0$, $\forall r \in R_0$. 由 (ii) 知 $R_0 \cup \{s\} \in \Omega$. 此与 R_0 是 Ω 的极大元素矛盾, 故 $R_0 = S$. 所以 S 是严格上三角的, 从而 $\mathrm{span}_{\mathbb{F}} S$ 是严格上三角的. □

设 A 是域 $\mathbb{F}$ 上的超代数,$\{A_{(k)} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 是 A 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间的集合. 若满足

(a) 当 $k \leq l$ 时, $A_{(k)} \supseteq A_{(l)}$,

(b) $A_{(k)} A_{(l)} \subseteq A_{(k+l)}$, $\quad \forall k, l \in \mathbb{Z}$,

(c) $\cup_{k\in\mathbb{Z}}A_{(k)} = A$,

则称 $\{A_{(k)} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 是 A 的一个下降的滤过, 简称 $\{A_{(k)} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 为 A 的一个滤过, 或者称 A 有滤过结构 $\{A_{(k)} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

当我们称 $A = A_{(-r)} \supseteq A_{(-r+1)} \supseteq \cdots \supseteq A_{(t)} = 0$ 是超代数 A 的一个滤过时, 其中 $r, t \in \mathbb{N}_0$, 则我们约定: 若 $k \leq -r$, 则 $A_{(k)} = A$; 若 $k \geq t$, 则 $A_{(k)} = 0$.

下面我们设 $\mathrm{char}\mathbb{F} = p > 2$. 令 $L = \mathrm{W}$ 或 S, 其中 $\mathrm{W} = \mathrm{W}(m, n, \underline{t})$, $\mathrm{S} = \mathrm{S}(m, n, \underline{t})$. 由第二章 §1 节知, $L = \bigoplus_{i=-1}^{\lambda} L_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数. 当 $L = \mathrm{W}$ 时, $\lambda = \xi - 1$; 当 $L = \mathrm{S}$ 时, $\lambda = \xi - 2$. 令 $L_{(j)} = \bigoplus_{i\geq j} L_i$, 则

$$L_{(-1)} \supseteq L_{(0)} \supseteq \cdots \supseteq L_{(\lambda)} \supseteq L_{(\lambda+1)} = 0 \tag{2.5}$$

是 L 的一个滤过. 称滤过 (2.5) 为 L 的自然滤过.

设 $y \in L$. 若 $\mathrm{ad}y$ 是 L 的幂零线性变换, 则称 y 为 ad- 幂零元, 或称 y 是 ad- 幂零的. L 中所有的 ad- 幂零元的集合记为 $\mathrm{nil}(L)$. 因为 L 是 $\mathbb{Z}$- 阶化的, 并且 L 是有限维的, 所以 $L_{-1} \subseteq \mathrm{nil}(L)$, $L_{(1)} \subseteq \mathrm{nil}(L)$.

令 $\mathrm{M}_s(\mathbb{F})$ 表示 $\mathbb{F}$ 上所有的 $s \times s$ 矩阵的集合. 若 $y = \sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}x_i\mathrm{D}_j \in L_0$, 其中 $a_{ij} \in \mathbb{F}$, 则令

$$\eta(y) := \left((-1)^{\tau(i)+\tau(i)\tau(j)}a_{ij}\right)_{s\times s} \in \mathrm{M}_s(\mathbb{F}).$$

引理 2.2　设 $y = \sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}x_i\mathrm{D}_j \in L_0$. *如果 y 是 ad- 幂零元, 则 $\eta(y)$ 是幂零阵.*

证明　因为 L 是 $\mathbb{Z}$- 阶化的, 所以 L_{-1} 是 L_0- 模. 令 ρ 是 L_0- 模 L_{-1} 所提供的表示, 则 $\rho(y) = \mathrm{ad}y$, $\forall y \in L_0$. 易见, $\rho(y)$ 在 L_{-1} 的基底 $\{\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \cdots, \mathrm{D}_s\}$ 上的矩阵是 $A = -\left((-1)^{\tau(i)+\tau(i)\tau(j)}a_{ij}\right)_{s\times s}^{t}$. 于是 $\eta(y) = -A^t$, 这里 A^t 表示矩阵 A 的转置阵. 因为 y 是 ad- 幂零元, 所以 $\rho(y)$ 是幂零线性变换. 于是 A 是幂零阵, 从而 $\eta(y)$ 是幂零阵.　□

引理 2.3　设 $y = \sum_{i=k}^{\lambda} y_i \in L$, *其中* $y_i \in L_i$, $0 \leq k \leq \lambda$. *若* $y \in \mathrm{nil}(L)$, *则* $y_k \in \mathrm{nil}(L)$.

证明　设 $y = y_k + y'$, 其中 $y_k \in L_k$, $y' \in \bigoplus_{i=k+1}^{\lambda} L_i \subseteq L_{(k+1)}$. 因为 $y \in \mathrm{nil}(L)$, 故可设 $(\mathrm{ad}y)^t = 0$. 任取 L 的一个 $\mathbb{Z}$- 齐次元素 z, 设 $z \in L_i$, 则 $(\mathrm{ad}y)^t(z) = 0$. 另一方面,

$$(\mathrm{ad}y)^t(z) = (\mathrm{ad}(y_k + y'))^t(z) = (\mathrm{ad}y_k)^t(z) + h,$$

从而 $(\mathrm{ad}y_k)^t(z) + h = 0$. 易见 $(\mathrm{ad}y_k)^t(z) \in L_{kt+i}$, $h \in L_{(kt+i+1)} = \bigoplus_{j\geq tk+i+1} L_j$, 所以 $(\mathrm{ad}y_k)^t(z) = 0$. 于是可知 $(\mathrm{ad}y_k)^t(L) = 0$, 故 $(\mathrm{ad}y_k)^t = 0$. 因此 $y_k \in \mathrm{nil}(L)$.　□

设 E_{ij} 为 $\mathbb{F}$ 上的 $s \times s$ 矩阵, 它的 (i,j) 位置元素是 1, 其余位置元素是零. 显然有

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}. \tag{2.6}$$

若 $y = \sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}x_i\mathrm{D}_j \in L_0$, 则

$$\eta(y) = \sum_{i,j=1}^{s} (-1)^{\tau(i)+\tau(i)\tau(j)}a_{ij}E_{ij}. \tag{2.7}$$

令 $\Omega = \{y \in \mathrm{nil}(L) \mid \mathrm{ad}y(L) \subseteq \mathrm{nil}(L)\}$.

引理 2.4 设 $y = \sum_{i=-1}^{\lambda} y_i \in L$, 其中 $y_i \in L_i$. 如果 $y \in \Omega$, 则 $y_{-1} = 0$.

证明 设 $y_{-1} = \sum_{i=-1}^{\lambda} a_i \mathrm{D}_i$, 其中 $a_i \in \mathbb{F}$. 假设 $y_{-1} \neq 0$, 可设 $a_j \neq 0$. 令 $k, l \in Y := \{1, 2, \cdots, s\}$, 使得 i, j, k 是互不相同的. 设 $z = [y_{-1},\ \mathrm{D}_{kl}(x_k x_l x_j)]$, 由计算知

$$\begin{aligned} z &= \left[\sum_{i=1}^{s} a_i \mathrm{D}_i,\ (-1)^{\tau(k)\tau(l)}(x_l x_j \mathrm{D}_l) - (-1)^{(\tau(k)+\tau(l))(\tau(j)+\tau(i))} x_k x_j \mathrm{D}_k\right] \\ &= (-1)^{\tau(k)\tau(l)}\big(a_l x_j \mathrm{D}_l + \alpha a_j x_l \mathrm{D}_l + \beta a_k x_j \mathrm{D}_k + \gamma a_j x_k \mathrm{D}_k\big), \end{aligned}$$

其中

$$\alpha = (-1)^{\tau(l)\tau(j)},\ \beta = (-1)^{(\tau(k)+\tau(l))(\tau(k)+\tau(i))},\ \gamma = (-1)^{\tau(k)+\tau(l)+\tau(l)\tau(j)}.$$

由 (2.6) 与 (2.7) 式, 可得

$$\begin{aligned} \eta(z)^n = (-1)^{n\tau(k)\tau(l)}\big(&\alpha^n a_j^n E_{ll} + \gamma^n a_j^n E_{kk} \\ &+(-1)^{\tau(j)+\tau(j)\tau(l)} \alpha^{n-1} a_l a_j^{n-1} E_{jl} \\ &+(-1)^{\tau(j)+\tau(j)\tau(k)} \beta\gamma^{n-1} a_k a_j^{n-1} E_{jk}\big). \end{aligned}$$

因为 $\alpha^n a_j^n \neq 0$, 所以 $\eta(z)^n \neq 0$, 故 $\eta(z)$ 不是幂零阵. 由引理 2.2 知, $[y, \mathrm{D}_{kl}(x_k x_l x_j)] \notin \mathrm{nil}(L)$, 于是 $y \notin \Omega$. 此与已知矛盾, 这就证明了 $y_{-1} = 0$. □

引理 2.5 设 $y = \sum_{i=0}^{\lambda} y_i \in L$, 其中 $y_i \in L_i$. 若 $y \in \Omega$, 则 $y_0 = 0$.

证明 假设 $y_0 \neq 0$. 可设 $y_0 = \sum_{i,j=1}^{s} a_{ij} x_i \mathrm{D}_j$, 其中 $a_{ij} \in \mathbb{F}$. 令

$$l = \min\{i \mid a_{ij} \neq 0,\ i, j \in Y\}, \tag{2.8}$$

$$t = \min\{j \mid a_{ij} \neq 0,\ i, j \in Y\}, \tag{2.9}$$

(i) $l \leq t$ 的情形. 令

$$k = \max\{j \mid a_{lj} \neq 0,\ j \in Y\}, \tag{2.10}$$

则 $a_{lk} \neq 0$. 显然 $t \leq k$. 由 $l \leq t$ 知 $l \leq k$. 所以我们有

$$y_0 = \sum_{j=t}^{k} a_{lj} x_l \mathrm{D}_j + \sum_{i=l+1}^{s} \sum_{j=t}^{s} a_{ij} x_i \mathrm{D}_j.$$

若 $l = k$, 由 $t \leq k$ 知 $t \leq l$. 因为 $l \leq t$, 所以 $t = l$. 于是

$$y_0 = a_{ll} x_l \mathrm{D}_l + \sum_{i=l+1}^{s} \sum_{j=t}^{s} a_{ij} x_i \mathrm{D}_j.$$

从而

$$\eta(y_0) = a_{ll} E_{ll} + \sum_{i=l+1}^{s} \sum_{j=t}^{s} (-1)^{\tau(i)+\tau(i)\tau(j)} a_{ij} E_{ij} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix},$$

其中 A 是 $l\times l$ 矩阵, 它的 (l,l) 位置元素是 $a_{ll}\neq 0$, 其余位置的元素均为零. 故 A 不是幂零阵, 从而 $\eta(y_0)$ 就不是幂零阵. 由引理 2.2 知 $y_0\notin \mathrm{nil}(L)$. 由引理 2.3 知 $y\notin \mathrm{nil}(L)$. 此与 $y\in\Omega$ 矛盾, 所以 $l<k$.

设 $h\in Y\backslash\{l,k\}$, 则

$$x_k\mathrm{D}_l=(-1)^{\tau(h)\tau(l)}\mathrm{D}_{hl}(x_hx_k)\in L.$$

令 $z=[y_0,x_k\mathrm{D}_l]$, 直接计算知

$$z=a_{lk}x_l\mathrm{D}_l+\sum_{i=l+1}^{s}a_{ik}x_i\mathrm{D}_l-\sum_{j=t}^{k}(-1)^{(\tau(l)+\tau(j))(\tau(k)+\tau(l))}a_{lj}x_k\mathrm{D}_j.$$

易见, $\eta(z)$ 是具有形状 $\left[\begin{smallmatrix}A&0\\B&C\end{smallmatrix}\right]$ 的矩阵, 其中 $A=a_{lk}E_{ll}$ 是一个 $l\times l$ 矩阵, 它的 (l,l) 位置元素是 $a_{lk}\neq 0$, 其它元素都为零. 因此 A 不是幂零阵, 故 $\eta(z)$ 不是幂零阵, 所以 $z\notin\mathrm{nil}(L)$. 由引理 2.3 知 $[y,x_k\mathrm{D}_l]\notin\mathrm{nil}(L)$. 此与 $y\in\Omega$ 矛盾.

(ii) 设 $t<l$. 令 $k=\max\{i\mid a_{it}\neq 0,i\in Y\}$, $z=[y_0,x_t\mathrm{D}_k]$. 仿 (i) 可证得 $\eta(z)$ 不是幂零阵, 于是 $y\notin\Omega$. 此为矛盾. 综上, 可知 $y_0=0$. □

引理 2.6 1) 若 $x\in L_0\cap\mathrm{nil}(L)$, $y\in L_{(1)}$, 则 $x+y\in\mathrm{nil}(L)$.

2) $x_i\mathrm{D}_j\in\mathrm{nil}(L)$, 其中 $i,j\in Y,i\neq j$.

3) 设 $i,j,k\in Y$. 若 i,j,k 互异, 则 $ax_j\mathrm{D}_k+bx_i\mathrm{D}_k\in\mathrm{nil}(L)$.

证明 1) 易见, $\{\mathrm{ad}x\}\cup\mathrm{ad}L_{(1)}$ 是 $\mathrm{pl}(L)$ 的李超子集. 由命题 2.1 知, $\mathrm{span}_{\mathbb{F}}(\{\mathrm{ad}x\}\cup\mathrm{ad}L_{(1)})$ 在 L 上是严格上三角的. 所以对任意 $y\in L_{(1)}$, $\mathrm{ad}x+\mathrm{ad}y$ 是 L 的幂零线性变换, 即 $\mathrm{ad}(x+y)$ 是幂零的, 从而 $x+y\in\mathrm{nil}(L)$.

2) 我们证明 $(\mathrm{ad}x_i\mathrm{D}_j)^p=0$. 不妨设 $i<j$.

(a) 若 $j\leq m$, 则 $i<m$. 若 $k\neq i$, 直接计算知

$$(\mathrm{ad}x_i\mathrm{D}_j)^p(x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_k)=x_i^px^{(\alpha-p\varepsilon_j)}x^u\mathrm{D}_k.$$

因为 $x_i^p=0$, 所以 $(\mathrm{ad}x_i\mathrm{D}_j)^p(x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_k)=0$. 若 $k=i$, 则

$$(\mathrm{ad}x_i\mathrm{D}_j)^p(x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_i)=x_i^px^{(\alpha-p\varepsilon_j)}x^u\mathrm{D}_i-px_i^{p-1}x^{(\alpha-(p-1)\varepsilon_j)}x^u\mathrm{D}_j=0.$$

(b) 若 $j>m$, 当 $k\neq i$ 时

$$(\mathrm{ad}x_i\mathrm{D}_j)^2(x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_k)=0.$$

当 $k=i$ 时, 直接计算可得

$$\begin{aligned}&(\mathrm{ad}x_i\mathrm{D}_j)^3(x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_i)\\&=-(-1)^{\tau(i)+\tau(j)+\overline{|u|}}\mathrm{ad}x_i\mathrm{D}_j\big(((-1)^i-1)x_ix^{(\alpha)}\partial_j(x^u)\mathrm{D}_j\big)=0.\end{aligned}$$

因为 $p>2$, 所以 $(\mathrm{ad}x_i\mathrm{D}_j)^p(x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_i)=0$.

综合 (a) 与 (b) 知, $(\mathrm{ad}x_i\mathrm{D}_j)^p(L)=0$, 所以 $(\mathrm{ad}x_i\mathrm{D}_j)^p=0$. 于是 $x_i\mathrm{D}_j\in\mathrm{nil}(L)$.

3) 由 2) 与 $[x_j\mathrm{D}_k,x_i\mathrm{D}_k]=0$ 知, $\{\mathrm{ad}x_j\mathrm{D}_k,\ \mathrm{ad}x_i\mathrm{D}_k\}$ 是 $\mathrm{pl}(L)$ 的一个李超子集. 由命题 2.1 知 $\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{ad}x_j\mathrm{D}_k,\ \mathrm{ad}x_i\mathrm{D}_k\}$ 在 L 上是严格上三角的, 故 $\mathrm{ad}(ax_j\mathrm{D}_k+bx_i\mathrm{D}_k)$ 是幂零的, $\forall a,b\in\mathbb{F}$, 所以 $ax_j\mathrm{D}_k+bx_i\mathrm{D}_k\in\mathrm{nil}(L)$. □

引理 2.7 若 i,j,k 互异, 则 $x_ix_j\mathrm{D}_k\in\Omega$.

证明 设 $l\in Y\backslash\{i,j,k\}$. 则

$$x_ix_j\mathrm{D}_k=(-1)^{\tau(l)\tau(k)}\mathrm{D}_{lk}(x_lx_ix_j)\in L_{(1)}\subseteq\mathrm{nil}(L).$$

令 $y=\sum_{i=-1}^{r}y_i\in L$, 其中 $y_i\in L_i$. 设 $y_{-1}=\sum_{l=1}^{s}a_l\mathrm{D}_l$, 其中 $a_l\in\mathbb{F}$, 则 $[x_ix_j\mathrm{D}_k,y]=z_0+z_1$, 其中 $z_0\in L_0$, $z_1\in L_{(1)}$. 进而

$$\begin{aligned}z_0=&\left[x_ix_j\mathrm{D}_k,\sum_{l=1}^{s}a_l\mathrm{D}_l\right]\\=&(-1)^{\tau(i)(\tau(i)+\tau(j)+\tau(k))}a_ix_j\mathrm{D}_k-(-1)^{\tau(j)(\tau(j)+\tau(k))}a_jx_i\mathrm{D}_k.\end{aligned}$$

由引理 2.6 的 3) 知, $z_0\in L_0\cap\mathrm{nil}(L)$. 由引理 2.6 的 1) 知, $z_0+z_1\in\mathrm{nil}(L)$, 所以 $x_ix_j\mathrm{D}_k\in\Omega$. □

令 $Q=\{y\in\mathrm{nil}(L)\mid\mathrm{ad}y(\Omega)\subseteq\Omega\}$.

引理 2.8 $Q=L_{(1)}$.

证明 由 Ω 的定义知, $L_{(2)}\subseteq\Omega$. 由引理 2.4 与引理 2.5 知 $\Omega\subseteq L_{(1)}$. 所以

$$[L_{(1)},\Omega]\subseteq[L_{(1)},L_{(1)}]\subseteq L_{(2)}\subseteq\Omega,$$

因而 $L_{(1)}\subseteq Q$.

下面证明 $Q\subseteq L_{(1)}$. 令 $y\in Q$, 可设 $y=\sum_{i=-1}^{r}y_i$, 其中 $y_i\in L_i$. 假设 $y_{-1}=\sum_{l=1}^{s}a_l\mathrm{D}_l\neq0$, 可设 $a_i\neq0$. 令 $z=x_ix_j\mathrm{D}_k$, 其中 $j,k\in Y\backslash\{i\}$, $j\neq k$. 由引理 2.7 知 $z\in\Omega$. 设 $[y,z]=h_0+h_1$, 其中 $h_0=[y_{-1},z]\in L_0$, $h_1\in L_{(1)}$. 由于 $a_i\neq0$, 所以

$$h_0=a_ix_j\mathrm{D}_k+(-1)^{\tau(i)\tau(j)}a_jx_i\mathrm{D}_k\neq0.$$

由引理 2.5 知 $h_0+h_1\notin\Omega$. 此与 $y\in Q$ 矛盾, 所以 $y_{-1}=0$.

假设 $y_0\neq0$. 可设 $y_0=\sum_{i,j=1}^{s}a_{ij}x_i\mathrm{D}_j$. 令 l 与 t 分别如 (2.8) 与 (2.9) 式所定义. 我们可设 $l\leq t$ ($t\leq l$ 的情形证明相仿). 设 k 如 (2.10) 式所定义. 相仿于引理 2.5 的前部分证明可得 $l<k$. 任取 $h\in Y\backslash\{l,k,t\}$, 令 $z_1=x_kx_h\mathrm{D}_l$. 由引理 2.7 知 $z_1\in\Omega$. 设 $[y,z_1]=g_1+g_2$, 其中 $g_1=[y_0,z_1]\in L_1$, $g_2\in L_{(2)}$. 由计算知

$$\begin{aligned}g_1=&a_{lk}x_lx_h\mathrm{D}_l+\sum_{i=l+1}^{s}(-1)^{\tau(k)\tau(h)}a_{ih}x_ix_k\mathrm{D}_l\\&-\sum_{j=t}^{k}(-1)^{(\tau(l)+\tau(j))(\tau(k)+\tau(h)+\tau(l))}a_{lj}x_kx_h\mathrm{D}_j.\end{aligned}$$

(若 $h < t$, 上面等式中的 $a_{ih} = 0$, 其中 $i = l, l+1, \cdots, s$). 则有

$$\begin{aligned}[\mathrm{D}_h, g_1] = & (-1)^{\tau(l)\tau(h)} a_{lk} x_l \mathrm{D}_l + \textstyle\sum_{i=l+1}^{s} (-1)^{\tau(i)\tau(h)} a_{ih} x_i \mathrm{D}_l \\ & + (-1)^{\tau(k)\tau(h)} a_{hh} x_k \mathrm{D}_l + (-1)^{(\tau(l)+\tau(j))(\tau(k)+\tau(h)+\tau(l))} a_{lj} x_k \mathrm{D}_j\end{aligned}.$$

由 (2.7) 式可得, 矩阵 $\eta([\mathrm{D}_h, g_1])$ 具有形状 $\left[\begin{smallmatrix} A & 0 \\ B & C \end{smallmatrix}\right]$, 其中 $A = (-1)^{\tau(l)\tau(h)} a_{lk} E_{ll}$ 是 $l \times l$ 矩阵, 它的 (l, l) 位置是 $a_{lk} \neq 0$, 而其余位置是零. 所以 A 不是幂零阵, 从而 $\eta([\mathrm{D}_h, g_1])$ 不是幂零阵, 故 $[\mathrm{D}_h, g_1] \notin \mathrm{nil}(L)$. 由引理 2.3 知 $[\mathrm{D}_h, g_1 + g_2] \notin \mathrm{nil}(L)$, 故 $g_1 + g_2 \notin \Omega$. 此与 $y \in Q$ 矛盾, 这就证明了 $y_0 = 0$. 于是 $y \in L_{(1)}$ 并且 $Q = L_{(1)}$. □

引理 2.9 以下结论成立:

1) $L_{(0)} = \{x \in L \mid [x, L_{(1)}] \subseteq L_{(1)}\}$. (2.11)

2) $L_{(i)} = \{x \in L_{(i-1)} \mid [x, L] \subseteq L_{(i-1)}\}, \ i \geq 1$. (2.12)

证明 1) 设 $T = \{x \in L \mid [x, L_{(1)}] \subseteq L_{(1)}\}$. 由 $[L_{(0)}, L_{(1)}] \subseteq L_{(1)}$ 知, $L_{(0)} \subseteq T$.

反之, 设 $y \in T$. 可设 $y = \sum_{i=-1}^{\lambda} y_i$, 其中 $y_i \in L_i$. 设 $y_{-1} = \sum_{l=1}^{s} a_l \mathrm{D}_l$. 任取 $i \in Y$, 由引理 2.7 知 $x_i x_j \mathrm{D}_k \in \Omega$, 其中 $j, k \in Y \backslash \{i\}$, $j \neq k$. 因为 $y \in T$, $x_i x_j \mathrm{D}_k \in L_{(1)}$, 所以 $[y, x_i x_j \mathrm{D}_k] \in L_{(1)}$. 于是 $[y_{-1}, x_i x_j \mathrm{D}_k] = 0$, 从而

$$a_i x_j \mathrm{D}_k + (-1)^{\tau(j)(\tau(i)+\tau(j))} a_j x_i \mathrm{D}_k = 0.$$

故 $a_i = 0$, $\forall i \in Y$. 因此 $y_{-1} = 0$, 从而 $y \in L_{(0)}$, 那么 $T \subseteq L_{(0)}$. 所以 $L_{(0)} = T$.

2) 设 $M = \{x \in L_{(i-1)} \mid [x, L] \subseteq L_{(i-1)}\}$. 显然 $L_{(i)} \subseteq L_{(i-1)}$. 因为 $[L_{(i)}, L] = [L_{(i)}, L_{(-1)}] \subseteq L_{(i-1)}$, 所以 $L_{(i)} \subseteq M$.

反之, 任取 $y \in M$, 则 $y \in L_{(i-1)}$. 故可设 $y = \sum_{j=i-1}^{\lambda} y_j$, 其中 $y_j \in L_j$. 令 $y_{i-1} = \sum a_{\alpha u l} x^{(\alpha)} x^u \mathrm{D}_l$, 其中 $a_{\alpha u l} \in \mathbb{F}$. 若 $\alpha \neq 0$, 可设 $\alpha_k \neq 0$, 因 $y \in M$, 故 $[y, L_{-1}] \subseteq L_{(i-1)}$. 于是 $[y_{i-1}, L_{-1}] = 0$, 从而 $[\mathrm{D}_k, y_{i-1}] = 0$. 进而可得: 当 $\alpha \neq 0$ 时, $a_{\alpha u l} = 0$. 若 $\alpha = 0$, 则 $u \neq \varnothing$. 同理可推得 $a_{\alpha u l} = 0$. 这就证明了 $y_{i-1} = 0$. 所以 $y \in L_{(i)}$. 因此 $M \subseteq L_{(i)}$, 故 $L_{(i)} = M$. □

定理 2.10 W 与 S 的自然滤过是不变的.

证明 显然 $L_{(-1)}$ 在 L 的自同构下是不变的. 因为 Ω 与 Q 在 L 的自同构下不变, 所以, 由引理 2.8 知 $L_{(1)}$ 是不变的. 由引理 2.9 知, 当 $i \geq 0$ 时, $L_{(i)}$ 也是不变的. □

令 $G_i = L_{(i)}/L_{(i+1)}$, 其中 $-1 \leq i \leq \lambda$, 则 G_i 是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化空间. 设 $G := \bigoplus_{i=-1}^{\lambda} G_i$, 则 G 是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化空间. 设 $x + L_{(i+1)} \in G_i$, $y + L_{(j+1)} \in G_j$, 定义

$$\left[x + L_{(i+1)}, y + L_{(j+1)}\right] := [x, y] + L_{(i+j+1)}.$$

易知, 此定义是有意义的. 于是通过线性扩张, 使得 G 有一个 $[\,,\,]$ 运算, 容易验证, 关于这个 $[\,,\,]$ 运算, G 是一个李超代数. 称 G 是由 L 的自然滤过诱导的李超代数.

引理 2.11 $G \cong L$.

证明 令 $\phi: L \longrightarrow G$ 是线性映射, 使得

$$\phi(x) = x + L_{(i+1)}, \quad \text{其中 } x \in L_{(i)} \backslash L_{(i+1)}.$$

直接验证可知, ϕ 是李超代数的满同态.

设 $y \in \ker\phi$. 若 $y \neq 0$, 则存在 i $(i \geq -1)$, 使得 $y \in L_{(i)} \backslash L_{(i+1)}$. 由 $\phi(y) = 0$ 知 $y + L_{(i+1)} = 0$, 所以 $y \in L_{(i+1)}$. 此为矛盾, 故 $y = 0$. 于是 $\ker\phi = 0$, 因而 ϕ 是单同态, 从而 ϕ 是同构. □

由 ϕ 的定义知,

$$\begin{aligned}\phi(L_i) =& \{x + L_{(i+1)} \mid x \in L_i\} = \{x + L_{(i+1)} \mid x \in L_{(i)}\} \\ =& L_{(i)} \backslash L_{(i+1)} = G_i, \quad i \geq -1.\end{aligned} \tag{2.13}$$

设 m, n, m', n' 是大于 1 的正整数, $\underline{t} = (t_1, \cdots, t_m) \in \mathbb{N}^m$, $\underline{t'} = (t'_1, \cdots, t'_{m'}) \in \mathbb{N}^{m'}$. 我们简记 $L(m, n, \underline{t})$ 与 $L(m', n', \underline{t'})$ 分别为 L 与 L', 其中 $L = \mathrm{W}$ 或 S. 与 L 中 Ω, Q 的定义相同, 我们也在 L' 中同样定义 Ω' 与 Q'.

命题 2.12 设 $L \cong L'$. 令 σ 是 L 到 L' 的同构映射, 则 $\sigma(L_{(i)}) = L'_{(i)}$, $\forall i \geq -1$.

证明 显然 $\sigma(L_{(-1)}) = L'_{(-1)}$, 并且 $\sigma(\mathrm{nil}(L)) = \mathrm{nil}(L')$. 于是可推得 $\sigma(\Omega) = \Omega'$, 从而 $\sigma(Q) = Q'$. 由引理 2.8 知, $Q = L_{(1)}$, $Q' = L'_{(1)}$, 故 $\sigma(L_{(1)}) = L'_{(1)}$. 由引理 2.9 可推得 $\sigma(L_{(i)}) = L'_{(i)}$, $\forall i \geq 0$. □

引理 2.13 设 $L \cong L'$, σ 是 L 到 L' 的同构映射. 令 G 与 G' 分别为 L 与 L' 的自然滤过诱导的 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数, 则 σ 诱导了一个 G 到 G' 的同构映射 $\widetilde{\sigma}$, 使得 $\widetilde{\sigma}(G_i) = G'_i$, $\forall i \geq -1$.

证明 定义线性映射 $\widetilde{\sigma}: G \longrightarrow G'$, 使得

$$\widetilde{\sigma}(x + L_{(i+1)}) = \sigma(x) + L'_{(i+1)},$$

其中 $x + L_{(i+1)} \in G_i$. 利用引理 2.12 可知, $\widetilde{\sigma}$ 是合理定义的, 并且

$$\begin{aligned}\widetilde{\sigma}\big([x + L_{(i+1)},\ y + L_{(j+1)}]\big) &= \sigma([x, y]) + L'_{(i+j+1)} \\ &= [\sigma(x), \sigma(y)] + L'_{(i+j+1)} \\ &= \big[\sigma(x) + L'_{(i+1)}, \sigma(y) + L'_{(j+1)}\big] \\ &= \big[\widetilde{\sigma}(x + L_{(i+1)}), \widetilde{\sigma}(y + L_{(j+1)})\big].\end{aligned}$$

故 $\widetilde{\sigma}$ 是李超代数的同态. 显然 $\widetilde{\sigma}(G_i) = G'_i$, $\forall i \geq -1$, 从而是满同态.

令 $y \in \ker\widetilde{\sigma}$, 则 $y \in G$. 故可设 $y = \sum_{i=-1}^{\lambda} y_i$, 其中 $y_i \in G_i$. 因为 $G_i = L_{(i)}/L_{(i+1)}$, 所以可设 $y_i = z_i + L_{(i+1)}$, 其中 $z_i \in L_{(i)}$, 于是 $\widetilde{\sigma}(y_i) = \sigma(z_i) + L'_{(i+1)}$. 因为 $\widetilde{\sigma}(y) = 0$, 所以 $\sum_{i=-1}^{\lambda} \widetilde{\sigma}(y_i) = 0$, 从而 $\widetilde{\sigma}(y_i) = 0$. 那么 $\sigma(z_i) + L'_{(i+1)} = 0$, 于是 $\sigma(z_i) \in L'_{(i+1)}$. 由引理 2.12 知 $z_i \in \sigma^{-1}(L'_{(i+1)}) = L_{(i+1)}$, 所以 $y_i = z_i + L_{(i+1)} = 0$, 其中 $-1 \leq i \leq \lambda$. 因此 $y = 0$. 故 $\ker\widetilde{\sigma} = 0$, 即 $\widetilde{\sigma}$ 是单同态, 从而 $\widetilde{\sigma}$ 是同构映射. □

当 $n=0$ 时, $\mathrm{W}(m,0,\underline{t})$ 与 $\mathrm{S}(m,0,\underline{t})$ 分别为 Cartan 型李代数 $\mathrm{W}(m,\underline{t})$ 与 $\mathrm{S}(m,\underline{t})$. 我们也记为 $L(m,\underline{t})$, 其中 $L=\mathrm{W}$或 S. 我们仍用 $L(m,n,\underline{t})$ 表示 $\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$ 或 $\mathrm{S}(m,n,\underline{t})$. 回忆 $Y_0:=\{1,2,\cdots,m\}$.

定理 2.14　$L(m,n,\underline{t})\cong L(m',n',\underline{t'})$ 当且仅当 $m=m'$, $n=n'$, $t_i=\tau(t_i')$, 其中 $i\in Y_0$, τ 是 Y_0 的一个置换.

证明　充分性是显然的, 下证必要性. 我们仍简记 $L(m,n,\underline{t})$ 与 $L(m',n',\underline{t'})$ 为 L 与 L'. 令 G 与 G' 分别是 L 与 L' 的自然滤过诱导的 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数, 并设 $\phi:G\longrightarrow L$ 是引理 2.11 中定义的同构映射. 同理, 我们也有同构映射 $\phi':G'\longrightarrow L'$. 由 (2.13) 式与引理 2.12 知

$$\phi(L_i)=G_i,\ \phi'(L_i')=G_i',\ \widetilde{\sigma}(G_i)=G_i',\ \forall i\in -1.$$

令 $\psi=(\phi')^{-1}\widetilde{\sigma}\phi$, 则

$$\psi(L_i)=(\phi')^{-1}\widetilde{\sigma}\phi(L_i)=(\phi')^{-1}\widetilde{\sigma}(G_i)=(\phi')^{-1}(G_i')=L_i'.$$

因为 ψ 是同构映射, 所以 $\psi(L_{\overline{0}})=L'_{\overline{0}}$, $\psi(L_{\overline{1}})=L'_{\overline{1}}$, 于是

$$\psi(L_i\cap L_{\overline{0}})=L_i'\cap L'_{\overline{0}},\ \psi(L_i\cap L_{\overline{1}})=L_i'\cap L'_{\overline{1}},\ \forall i\geq -1.$$

特别地, $\psi(L_{-1}\cap L_{\overline{0}})=L'_{-1}\cap L'_{\overline{0}}$, 从而 $\dim(L_{-1}\cap L_{\overline{0}})=\dim(L'_{-1}\cap L'_{\overline{0}})$. 于是 $m=m'$. 同理知 $\dim(L_{-1}\cap L_{\overline{1}})=\dim(L'_{-1}\cap L'_{\overline{1}})$, 所以 $n=n'$. 令

$$Q_i=\{x\in L_i\cap L_{\overline{0}}\mid \mathrm{ad}x(L_{-1}\cap L_{\overline{1}})=0\},\ i\geq -1,\tag{2.14}$$

$$Q_i'=\{x\in L_i'\cap L'_{\overline{0}}\mid \mathrm{ad}x(L'_{-1}\cap L'_{\overline{1}})=0\},\ i\geq -1,\tag{2.15}$$

则 $Q_i=L(m,\underline{t})_i$, $Q_i'=L(m,\underline{t'})_i$. 设 $Q=\sum_{i\geq -1}Q_i$, $Q'=\sum_{i\geq -1}Q_i'$, 则 $Q=L(m,\underline{t})$, $Q'=L(m,\underline{t'})$. 由 (2.14) 与 (2.15) 式知 $\psi(Q_i)=Q_i'$, $\forall i\geq -1$, 从而 $\psi(Q)=Q'$, 于是 $L(m,\underline{t})\cong L(m,\underline{t'})$. 由李代数的结果知 (见文献 [26] 与 [61]), 存在 Y_0 的置换 τ, 使得 $t_i=\tau(t_i')$, $\forall i\in Y_0$. 必要性得证.　□

§3　H 的自然滤过

在本节中, 我们将证明 H 的自然滤过是不变的; 进而得到了两个 H 型李超代数同构的充要条件.

我们仍设 $\mathrm{H}=\mathrm{H}(m,n,\underline{t})$, $\widetilde{\mathrm{H}}=\widetilde{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})$, 其中 $m=2r$ 是偶数. 由第二章 §1 节知, $\mathrm{H}=\bigoplus_{i=-1}^{\xi-3}\mathrm{H}_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数. 令 $\mathrm{H}_{(j)}=\bigoplus_{i\geq j}\mathrm{H}_i$, 则

$$\mathrm{H}=\mathrm{H}_{(-1)}\supseteq\mathrm{H}_{(0)}\supseteq\cdots\supseteq\mathrm{H}_{(\xi-3)}\supseteq\mathrm{H}_{(\xi-2)}=0$$

是 H 的一个下降的滤过, 称之为 H 的自然滤过.

由第二章引理 4.2 知, H 是 $\widetilde{\mathrm{H}}$ 的理想. 由第二章引理 4.6 知

$$\widetilde{\mathrm{H}} = \mathrm{H} \oplus \mathbb{F}(\mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E)) \oplus \sum_{i=1}^{m} \mathbb{F}(\mathrm{D_H}(x^{(p^{t_i}\varepsilon_i)})), \tag{3.1}$$

从而 $\widetilde{\mathrm{H}} = \bigoplus_{i=-1}^{\xi-2} \widetilde{\mathrm{H}}_i$ 也是 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数, 其中 $\widetilde{\mathrm{H}}_i = \widetilde{\mathrm{H}} \cap \mathrm{W}_i$. 由 (3.1) 式知 $\mathrm{H}_i \subseteq \widetilde{\mathrm{H}}_i$, $\forall i \geq -1$.

若 L 是有限维 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数, $y \in L$. 我们用 $\lambda(y)$ 表示 y 的次数最小的非零 $\mathbb{Z}$-齐次成分.

引理 3.1 设 $y_1, y_2, \cdots, y_k \in L\backslash\{0\}$. 若 $\{y_i \mid i = 1, \cdots, k\}$ 是线性相关的, 则 $\{\lambda(y_i) \mid i = 1, \cdots, k\}$ 也是线性相关的.

证明 因为 $\{y_i \mid i = 1, \cdots, k\}$ 是线性相关的, 所以存在不全为零的元素 $a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{F}$, 使得 $\sum_{i=1}^{k} a_i y_i = 0$. 不妨设 $a_1, \cdots, a_l \neq 0$, $a_{l+1} = \cdots = a_k = 0$, 其中 $1 \leq l \leq k$. 令

$$u = \min\{\mathrm{zd}(\lambda(y_i)) \mid i = 1, \cdots, l\}.$$

不失一般性, 可设 $\mathrm{zd}(\lambda(y_i)) = u$, $i = 1, \cdots, t$; $\mathrm{zd}(\lambda(y_j)) > u$, $j = t+1, \cdots, l$. 因为 $\sum_{i=1}^{l} a_i y_i = 0$, 所以 $\sum_{i=1}^{t} a_i \lambda(y_i) = 0$. 由于 $a_1, \cdots, a_t \neq 0$, 故 $\{\lambda(y_i) \mid i = 1, \cdots, k\}$ 是线性相关的. □

令 $\overline{\Lambda}(m, n, \underline{t}) = \Lambda(m, n, \underline{t}) \oplus \sum_{i=1}^{m} \mathbb{F}x^{(p^{t_i}\varepsilon_i)}$, 则 $\overline{\Lambda}(m, n, \underline{t})$ 是 $\Lambda(m, n)$ 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间. 由 (3.1) 式知 $\widetilde{\mathrm{H}} = \mathrm{D_H}(\overline{\Lambda}(m, n, \underline{t}))$.

引理 3.2 设 $0 \neq a \in \overline{\Lambda}(m, n, \underline{t})$, 则以下命题成立.

1) 若 $\mathrm{D}_i(a) = 0$, 其中 $i \in Y_0$, 则 $ax^{(k\varepsilon_i)} \neq 0$, $0 \leq k \leq \pi_i$.

2) 设 $T \subseteq Y_0$. 若 $\mathrm{D}_i(a) = 0$, $\forall i \in T$, 则

$$a\left(\prod_{i \in T} x^{(k_i\varepsilon_i)}\right) \neq 0, \ 0 \leq k_i \leq \pi_i, \ \forall i \in T.$$

3) 设 $T \subseteq Y_1$. 若 $\mathrm{D}_i(a) = 0$, $\forall i \in T$, 则 $a\big(\prod_{i \in T} x_i\big) \neq 0$.

证明 1) 对 k 用归纳法. 当 $k = 0$ 时结论显然成立. 假设 $ax^{((k-1)\varepsilon_i)} \neq 0$, 其中 $k \leq \pi_i$. 则

$$\mathrm{D}_i(ax^{(k\varepsilon_i)}) = \mathrm{D}_i(x^{(k\varepsilon_i)}a) = x^{((k-1)\varepsilon_i)}a + x^{(k\varepsilon_i)}\mathrm{D}_i(a) = ax^{((k-1)\varepsilon_i)} \neq 0.$$

所以 $ax^{(k\varepsilon_i)} \neq 0$.

2) 不妨设 $T = \{1, 2, \cdots, l\}$, 其中 $l \leq m$. 对 l 用归纳法证明

$$a\left(\prod_{i=1}^{l} x^{(k_i\varepsilon_i)}\right) \neq 0.$$

当 $l = 1$ 时, 由 1) 知 $ax^{(k_1\varepsilon_1)} \neq 0$, 其中 $0 \leq k_1 \leq \pi_1$. 假设 $a\left(\prod_{i=1}^{l-1} x^{(k_i\varepsilon_i)}\right) \neq 0$. 由已知 $\mathrm{D}_l(a) = 0$, 所以可知 $\mathrm{D}_l\left(a\left(\prod_{i=1}^{l-1} x^{(k_i\varepsilon_i)}\right)\right) = 0$. 因此由 1) 式知

$$a\left(\prod_{i=1}^{l-1} x^{(k_i\varepsilon_i)}\right) x^{(k_l\varepsilon_l)} \neq 0,$$

即 $a(\prod_{i=1}^{l} x^{(k_i\varepsilon_i)}) \neq 0$. 归纳法完成.

3) 的证明与 2) 相仿. □

引理 3.3 设 $g_1, \cdots, g_k \in \overline{\Lambda}(m,n,\underline{t})$. 若 $\mathrm{zd}(\lambda(g_i)) \geq 1$, $i = 1, \cdots, k$, 则 $\{g_i \mid i = 1, \cdots, k\}$ 线性相关当且仅当 $\{\mathrm{D_H}(g_i) \mid i = 1, \cdots, k\}$ 线性相关.

证明 必要性显然. 利用 $\mathrm{zd}(g_i) \geq 1$, $i = 1, \cdots, k$, 以及 $\ker \mathrm{D_H} = \mathbb{F}1$, 即可证得充分性. □

引理 3.4 设 $\mathrm{D_H}(g) \in \mathrm{hg}(\widetilde{\mathrm{H}})$, 若 $\mathrm{D_H}(g) \notin \mathbb{F}1 \cup \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E)\}$, 则存在 $f \in \bigoplus_{i=2}^{\xi} \Lambda(m,n,\underline{t})$, 使得 $[\mathrm{D_H}(g), \mathrm{D_H}(f)] \neq 0$.

证明 设 $g = \sum_{\alpha,u} c_{\alpha u} x^{(\alpha)} x^u$, 其中 $c_{\alpha u} \in \mathbb{F}$. 令 $\Delta = \{(\alpha, u) \mid c_{\alpha u} \neq 0\}$.

假设存在 $(\alpha, u) \in \Delta$, 使得 $u \neq \varnothing$, $u \neq E$. 任取 $i \in \{u\}$, $j \in Y_1 \backslash \{u\}$, 其中 $Y_1 = \{m+1, \cdots, s\}$. 则

$$[\mathrm{D_H}(g), \mathrm{D_H}(x_i x_j)] = \mathrm{D_H}\left(\sum_{(\alpha,u)\in\Delta} c_{\alpha u}(-1)^{\mathrm{d}(g)} x^{(\alpha)} \mathrm{D}_i(x^u) x_j \right.$$
$$\left. - \sum_{(\alpha,u)\in\Delta} c_{\alpha u}(-1)^{\mathrm{d}(g)} x^{(\alpha)} \mathrm{D}_j(x^u) x_i \right) \neq 0.$$

若对任意 $(\alpha, u) \in \Delta$, 均有 $u = \varnothing$ 或 $u = E$, 那么仅有以下两种情形.

(i) $g = \sum_\alpha k_\alpha x^{(\alpha)} + \sum_\beta l_\beta x^{(\beta)} x^E$, $k_\alpha, l_\beta \in \mathbb{F}$, $\Delta_1 := \{\alpha \in \mathbb{N}_o^m \backslash \{0\} \mid k_\alpha \neq 0\} \neq \varnothing$. 任取 $\alpha \in \Delta_1$, 可设 $\alpha_i \neq 0$, 其中 $i \in Y_0$. 对 $j \in Y_1$, 则有

$$[\mathrm{D_H}(g), \mathrm{D_H}(x_i x_j)] = \mathrm{D_H}\left(\sum_{\alpha\in\Delta_1} k_\alpha \sigma(i) x^{(\alpha-\varepsilon_i)} x_j \right.$$
$$\left. + \sum_\beta l_\beta x^{(\beta)} \mathrm{D}_j(x^E) \right) \neq 0.$$

(ii) $g = \sum_\alpha l_\alpha x^{(\alpha)} x^E$, 其中 $l_\alpha \in \mathbb{F}$. 令 $\Delta_2 = \{\alpha \in \mathbb{N}_o^m \mid l_\alpha \neq 0\}$. 若存在 $\alpha \in \Delta_2$ 与 $i \in Y_0$, 使得 $x^{(\alpha)} x_i \neq 0$, 取 $j \in Y_1$, 则有

$$[\mathrm{D_H}(g), \mathrm{D_H}(x_i x_j)] = \mathrm{D_H}\left(\sum_{\alpha\in\Delta_2} l_\alpha (-1)^{\mathrm{d}(g)} x^{(\alpha)} x_i \mathrm{D}_j(x^E)\right) \neq 0.$$

若对任意 $i \in Y_0$, 均有 $x^{(\alpha)} x_i = 0$, 则可设 $\alpha = (p^{l_1-1}, \cdots, p^{l_m-1})$, 其中 $0 < l_i \leq t_i$, $\forall i \in Y_0$. 因为 $\mathrm{D_H}(g) \notin \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E)\}$, 所以存在 $i \in Y_0$, 使得 $l_i < t_i$. 故

$$[\mathrm{D_H}(g), \mathrm{D_H}(x^{(p^{l_i}\varepsilon_i + \varepsilon_i)})]$$
$$= \mathrm{D_H}\left(\sum_{\alpha\in\Delta_2} k_\alpha \sigma(i') \binom{\alpha - \varepsilon_{i'} + p^{l_i}\varepsilon_i}{\alpha - \varepsilon_{i'}} x^{(\alpha - \varepsilon_{i'} + p^{l_i}\varepsilon_i)} x^E \right) \neq 0. \qquad \square$$

设 L 是 $\mathbb{F}$ 上的李超代数, $D \in \mathrm{Der}\,(L)$, 令 $I(D) = \dim(\mathrm{Im}(D))$. 若 $T \subseteq \mathrm{Der}\,(L)$, 定义 $I(T) := \min\{I(D) \mid 0 \neq D \in T\}$.

定理 3.5 设 $T = \mathrm{ad}(\mathrm{hg}(\widetilde{\mathrm{H}}))\big|_{\mathrm{H}}$, 则 $I(T) = s$, 并且 $I(\mathrm{ad}\,\mathrm{D_H}(g)) = s$ 当且仅当 $0 \neq \mathrm{D_H}(g) \in \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E)\}$.

证明 对于 $y \in \mathrm{hg}(\widetilde{\mathrm{H}})$, 我们简记 $\mathrm{ad}\,y\big|_{\mathrm{H}}$ 为 $\mathrm{ad}\,y$. 直接计算知, 当 $|\alpha| + |u| \geq 2$ 时, $[\mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E), \mathrm{D_H}(x^{(\alpha)}x^u)] = 0$. 由引理 3.3 知,$\{[\mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E), \mathrm{D_H}(x_i)] \mid i \in Y\}$ 是线性无关的, 所以 $I(\mathrm{ad}\,\mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E)) = s$.

设 $\mathrm{D_H}(g_0) \in \mathrm{hg}(\widetilde{\mathrm{H}})$, 并且 $\mathrm{D_H}(g_0) \notin \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E)\}$. 下面我们证明 $I(\mathrm{ad}\,\mathrm{D_H}(g_0)) > s$. 设 $\lambda(\mathrm{D_H}(g_0)) = \mathrm{D_H}(g)$. 由引理 3.1, 只需证明 $I(\mathrm{ad}\,\mathrm{D_H}(g)) > s$.

令 $V_{\bar{0}} = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D_H}(x_i) \mid i \in Y_0\}$, $V_{\bar{1}} = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D_H}(x_i) \mid i \in Y_1\}$. 若 $\mathrm{D_H}(g) \in V_{\bar{0}}$, 则 $g = \sum_{j=1}^{k} c_{l_j} x_{l_j}$, 其中 $l_j \in Y_0$, $c_{l_j} \in \mathbb{F}$. 为简便, 不妨设 $g = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j$, 其中 $0 \neq c_j \in \mathbb{F}$, $k \leq m$. 令

$$\begin{aligned} M = &\{x^{(2\varepsilon_{i'})} \mid i = 1, \cdots, k\} \cup \{x^{(\varepsilon_i + \varepsilon_{i'})} \mid i \in Y_0 \backslash \{1', \cdots, k'\}\} \\ &\cup \{x_{1'}x_i \mid i \in Y_1\} \cup \{x^{(2\varepsilon_{1'})}x_{m+1}\}. \end{aligned}$$

由引理 3.3 知 $\{[\mathrm{D_H}(g), \mathrm{D_H}(f)] \mid f \in M\}$ 是线性无关的, 故 $I(\mathrm{ad}\,\mathrm{D_H}(g)) > s$.

设 $\mathrm{D_H}(g) \in V_{\bar{1}}$, 则 $g \in \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x_i \mid i \in Y_1\}$. 不妨设 $g = \sum_{j=m+1}^{t} c_j x_j$, 其中 $0 \neq c_j \in \mathbb{F}$, $m + 1 \leq t \leq s$. 令

$$\begin{aligned} M_1 = &\{x_1 x_i \mid i = m+1, \cdots, l\} \cup \{x_1 x_{m+1} x_i \mid i = l+1, \cdots, s\} \\ &\cup \{x^{(\varepsilon_1 + \varepsilon_i)} \mid i \in Y_0\} \cup \{x^{(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} x_{m+1}\}. \end{aligned}$$

则 $\{[\mathrm{D_H}(g), \mathrm{D_H}(f)] \big| f \in M_1\}$ 是线性无关的, 所以 $I(\mathrm{ad}\,\mathrm{D_H}(g)) > s$.

令 $\mathrm{D_H}(g) \notin V_{\bar{0}} \cup V_{\bar{1}}$. 因为 $\mathrm{D_H}(g) \in \mathrm{hg}(\widetilde{\mathrm{H}})$, 所以 $\mathrm{D_H}(g) \notin V_{\bar{0}} + V_{\bar{1}}$. 于是 $\mathrm{zd}(g) \geq 2$. 令

$$R = \{i \in Y_0 \mid [\mathrm{D_H}(g), \mathrm{D_H}(x_i)] = 0\};$$
$$R_1 = \{i \in Y_1 \mid [\mathrm{D_H}(g), \mathrm{D_H}(x_i)] = 0\};$$
$$J_0 = \{i \in R \mid i' \in R\}.$$

可设 $J_0 = \{i_1, i_1', \cdots, i_u, i_u'\}$. 设 $R_1 = \{j_1, \cdots, j_h\}$, 并令 $J_1 = R \backslash J_0 = \{i_{u+1}, \cdots, i_{u+t}\}$, $J_2 = \{i_{u+1}', \cdots, i_{u+t}'\}$, $\bar{J} = Y \backslash (R \cup R_1 \cup J_2)$. 因为

$$[\mathrm{D_H}(g), \mathrm{D_H}(x_j)] = \sigma(j')(-1)^{\tau(j')\mathrm{d}(g)} \mathrm{D}_{j'}(g),$$

所以

$$\mathrm{D}_{j'}(g) = 0 \iff [\mathrm{D_H}(g), \mathrm{D_H}(x_j)] = 0. \tag{3.2}$$

令 $x^{(\gamma)} = \prod_{k \in J_0} x^{(\gamma_k \varepsilon_k)}$, 其中 $\gamma_k = 0, 1, \cdots, p-1$, $\forall k \in J_0$. 又设

$$x^q = \prod_{j \in R_1} x_1^{q_j}, \text{ 其中 } q_j = 0 \text{ 或 } 1.$$

任取 $l \in J_2$, $\beta_l \in \{2,3,\cdots,p-1\}$, 利用 (3.2) 式可算得

$$\begin{aligned}&[\mathrm{D_H}(g),\mathrm{D_H}(x^{(\gamma)}x^q x^{(\beta_l\varepsilon_l)})]\\&\quad=\mathrm{D_H}(\sigma(l')\mathrm{D}_{l'}(g)x^{(\gamma)}x^q x^{((\beta_l-1)\varepsilon_l)}).\end{aligned}\tag{3.3}$$

任取 $v \in \bar{J}$, 则有

$$\begin{aligned}&[\mathrm{D_H}(g),\mathrm{D_H}(x_v x^{(\gamma)}x^q)]\\&\quad=\mathrm{D_H}(\sigma(v')(-1)^{\tau(v')\mathrm{d}(g)}\mathrm{D}_{v'}(g)x^{(\gamma)}x^q).\end{aligned}\tag{3.4}$$

易见 $R=J_0\cup J_1$, $J_2\cap R=\varnothing$. 因为 $J_2\subseteq Y_0$, 所以 $J_2\cap R_1=\varnothing$. 于是 $[\mathrm{D_H}(g),\mathrm{D_H}(x_l)]\neq 0$, $\forall l\in J_2$. 由 (3.3) 式知 $\mathrm{D}_{l'}(g)\neq 0$. 由引理 3.2 的 2) 知 $\mathrm{D}_{l'}(g)x^{(\gamma)}\neq 0$. 由引理 3.2 的 3) 知 $\mathrm{D}_{l'}(g)x^{(\gamma)}x^q\neq 0$. 再由引理 3.2 的 2) 知

$$\mathrm{D}_{l'}(g)x^{(\gamma)}x^q x^{((\beta_l-1)\varepsilon_l)}\neq 0.\tag{3.5}$$

同理知

$$\mathrm{D}_{v'}(g)x^{(\gamma)}x^q\neq 0.\tag{3.6}$$

易见 (3.5) 式与 (3.6) 式的所有的非零元素是线性无关的. 由引理 3.3 知, (3.3) 式与 (3.4) 式右端的所有元素也是线性无关的. 由于 $|J_0|=2u$, $|R_1|=h$, $|J_2|=t$, 所以形如 (3.3) 式右端的元素共有 $p^{2u}2^h(p-2)t$ 个. 同理, 形如 (3.4) 式右端的元素共有 $p^{2u}2^h(s-2u-2t-h)$ 个. 于是

$$\begin{aligned}I(\operatorname{ad}\mathrm{D_H}(g))&\geq p^{2u}2^h(p-2)t+p^{2u}2^h(s-2u-2t-h)\\&\geq 2^{2u+h}(p-2)t+2^{2u+h}(s-2u-2t-h)\\&=2^{2u+h}(p-4)t+2^{2u+h}(s-(2u+h)).\end{aligned}$$

设 $2u+h=0$, 则 $u=h=0$. 若 $t=0$, 则 $R=R_1=\varnothing$. 所以 $[\mathrm{D_H}(g),\mathrm{D_H}(x_i)]\neq 0$, $\forall i\in Y$. 显然 $\{[\mathrm{D_H}(g),\mathrm{D_H}(x_i)]\mid i\in Y\}$ 是线性无关的. 由引理 3.4 知 $I(\operatorname{ad}\mathrm{D_H}(g))>s$. 若 $t>0$, 注意到 $\mathrm{char}\mathbb{F}=p\geq 5$, 则有

$$I(\operatorname{ad}\mathrm{D_H}(g))\geq(p-4)t+s>s.$$

设 $2u+h>0$. 若 $2u+h=s$, 则 $R\cup R_1=Y$. 所以

$$[\mathrm{D_H}(g),\mathrm{D_H}(x_i)]=0,\ \forall i\in Y.$$

于是 $\mathrm{D}_{i'}(g)=0$, $\forall i\in Y$, 从而 $g\in\mathbb{F}1$. 此与 $\mathrm{zd}(g)\geq 2$ 矛盾, 因此 $0<2u+h<s$, 即 $1\leq 2u+h\leq s-1$. 从而有

$$I(\operatorname{ad}\mathrm{D_H}(g))\geq 2^{2u+h}(s-(2u+h)).$$

因为当 $1 \le x \le s-1$ 时, 函数 $2^x(s-x)$ 是增函数, 所以

$$I(\operatorname{ad} \mathrm{D_H}(g)) \ge 2(s-1) = 2s-2 > s. \qquad \square$$

引理 3.6 设 $f_i = g_i + h_i$, 其中 $f_i, g_i, h_i \in \overline{\Lambda}(m,n,\underline{t})$, $i = 1,2,\cdots,k$. 如果 $\{g_i \mid i = 1,2,\cdots,k\}$ 线性无关, 并且 $\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{g_i \mid i = 1,2,\cdots,k\} \cap \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{h_i \mid i = 1,2,\cdots,k\} = 0$, 那么 $\{f_i \mid i = 1,2,\cdots,k\}$ 线性无关.

证明 若 $\sum_{i=1}^k l_i f_i = 0$, 其中 $l_i \in \mathbb{F}$, 则 $\sum_{i=1}^k l_i g_i = -\sum_{i=1}^k l_i h_i$. 于是

$$\sum_{i-1}^{k} l_i g_i \in \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{g_i \mid i = 1,\cdots,k\} \cap \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{h_i \mid i = 1,\cdots,k\} = 0.$$

因为 $\{g_i \mid i = 1,\cdots,k\}$ 线性无关, 所以 $l_i = 0$, $i = 1,\cdots,k$. 这就证明了 $\{f_i \mid i = 1,\cdots,k\}$ 线性无关. $\square$

定理 3.7 $I(\mathrm{hg}(\mathrm{Der}\,(\mathrm{H}))) = s$, 进而 $I(\mathrm{D}) = s$ 当且仅当 $0 \ne \mathrm{D} \in \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\operatorname{ad} \mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E)\}$, 其中 $\mathrm{D} \in \mathrm{hg}(\mathrm{Der}\,(\mathrm{H}))$.

证明 由定理 3.5 知 $I(\operatorname{ad} \mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E)) = s$. 因此 $I(\mathrm{hg}(\mathrm{Der}\,(\mathrm{H}))) \le s$. 令 $D \in \mathrm{hg}(\mathrm{Der}\,(\mathrm{H}))$, 并且 $I(D) \le s$. 由第二章引理 4.20, 可设

$$D = \operatorname{ad} \mathrm{D_H}(g) + k\phi + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{t_i - 1} c_{ij} (\operatorname{ad} \mathrm{D}_i)^{p^j},$$

其中 $k, c_{ij} \in \mathbb{F}$, $\mathrm{D_H}(g) \in \mathrm{hg}(\widetilde{\mathrm{H}})$, $\phi = \operatorname{ad} h$. 下面证明 c_{ij} 与 k 均为零.

假设 $c_{ij} \ne 0$. 令 $r = \max\{j \mid c_{lj} \ne 0\}$. 设

$$G = \{\alpha \in A(m,\underline{t}) \mid \alpha_l = p^r + 1,\ p^{t_i} - 1 \le \alpha_i < p^{t_i},\ i = 1,\cdots,l-1,l+1,\cdots,m\}.$$

令 $\alpha \in G$, 则有

$$D(\mathrm{D_H}(x^{(\alpha)}x^u)) = \mathrm{D_H}(c_{lr} x^{(\alpha - p^r \varepsilon_l)} x^u + y),$$

其中 y 是某些 $x^{(\beta)}x^v$ 的 $\mathbb{F}$- 线性组合, 并且 $\beta_l > 1$. 由引理 3.6 与引理 3.3 知

$$\{\mathrm{D_H}(c_{lr} x^{(\alpha - p^r \varepsilon_l)} x^u + y) \mid \alpha \in G,\ u \in B(n)\}$$

是线性无关的. 于是 $I(D) \ge (p-1)^{m-1} 2^n > s$, 此与 $I(D) \le s$ 矛盾. 所以每个 c_{ij} 均为零, 因而

$$D = \operatorname{ad} \mathrm{D_H}(g) + k\phi.$$

令 $\lambda(\mathrm{D_H}(g)) = \mathrm{D_H}(f)$, 这里 $\lambda(\mathrm{D_H}(g))$ 仍表示 $\mathrm{D_H}(g)$ 的次数最小的 $\mathbb{Z}$- 齐次成分. 若 $\mathrm{zd}(\mathrm{D_H}(f)) = -1$, 则 $\mathrm{D_H}(f) \in V_{\bar{0}} \cup V_{\bar{1}}$, 并且

$$\lambda(\mathrm{D}(b)) = \lambda((\operatorname{ad} \mathrm{D_H}(f))(b)),\ \forall b \in \mathrm{H}. \tag{3.7}$$

由引理 3.5 知 $I(\operatorname{ad} \mathrm{D_H}(f)) > s$, 于是由 (3.7) 式可知 $I(D) > s$. 此为矛盾, 所以 $\mathrm{zd}(\mathrm{D_H}(f)) \ge 0$.

假设 $k \neq 0$. 若 $\mathrm{zd}(\mathrm{D_H}(f)) \geq 1$, 令

$$M_2 = \{\mathrm{D_H}(x^{(\alpha)}x^u) \mid |\alpha| + |u| = 3\},$$

则 $\phi(b) = b$, $\forall b \in M_2$. 所以

$$\lambda(D(b)) = \lambda((\,\mathrm{ad}\,\mathrm{D_H}(f))(b) + k\phi(b)) = k\phi(b) = kb, \ \forall b \in M_2,$$

故 $\{\lambda(D(b)) \mid b \in M_2\}$ 是线性无关的. 因此 $I(D) > s$. 此为矛盾. 若 $\mathrm{zd}(\mathrm{D_H}(f)) = 0$, 则可设 $f = \sum_{l,k=1}^{s} a_{lk}(x_l x_k)$, 其中 $a_{lk} \in \mathbb{F}$. 令

$$\begin{aligned} M_3 = & \left\{\mathrm{D_H}\left(\prod_{i=1}^{t} x_{m+i}\right) \mid t = 1, \cdots, n\right\} \\ & \cup\left\{\mathrm{D_H}(x^{(\varepsilon_i + \varepsilon_{i'})}x^E), \mathrm{D_H}(x^{(2\varepsilon_i + 2\varepsilon_{i'})}x^E) \mid i = 1, \cdots, r\right\} \\ & \cup\left\{\mathrm{D_H}(x^{(3\varepsilon_i + 3\varepsilon_{i'})}x^E)\right\}, \end{aligned}$$

其中 $r = \frac{m}{2}$. 直接计算知

$$\lambda(D(b)) = \left(\mathrm{ad}\,\mathrm{D_H}\left(\sum_{l,k=1}^{s} a_{lk}(x_l x_k)\right) + k\phi\right)(b) \neq 0, \ \forall b \in M_3.$$

考察 $\lambda(D(b))$ 的 $\mathbb{Z}$- 次数可知 $\{\lambda(D(b)) \mid b \in M_3\}$ 是线性无关的. 所以 $I(D) > s$, 亦为矛盾. 因此 $k = 0$. 那么 $D = \mathrm{ad}\,\mathrm{D_H}(g)$. 再由定理 3.5 可得 $I(\mathrm{hg}(\,\mathrm{Der}\,(\mathrm{H}))) = s$, 并且

$$I(D) = s \iff D \in \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\,\mathrm{ad}\,\mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E)\}. \qquad \square$$

令 $m', n' \in \mathbb{N}$, $m' = 2r'$, $n' > 1$. 设 $\underline{t}' = (t'_1, \cdots, t'_{m'}) \in \mathbb{N}^{m'}$. 同样, 我们可定义李超代数 $\widetilde{\mathrm{H}}(m', n', \underline{t}')$, $\overline{\mathrm{H}}(m', n', \underline{t})$ 与 $\mathrm{H}(m', n', \underline{t}')$. 令 $\pi' = (\pi'_1, \cdots, \pi'_{m'})$, 其中 $\pi'_i = p^{t'_i} - 1$, $i = 1, \cdots, m'$. 令 $s' = m' + n'$, $E' = (m' + 1, \cdots, m' + n')$.

命题 3.8 设 $\mathrm{H} = \mathrm{H}(m, n, \underline{t})$, $\mathrm{H}' = \mathrm{H}(m', n', \underline{t}')$. 令

$$R = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D_H}(x^{(\alpha)}x^u) \in \mathrm{H} \mid |\alpha| + |u| \geq 2\},$$
$$R' = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D_H}(x^{(\alpha)}x^u) \in \mathrm{H}' \mid |\alpha| + |u| \geq 2\}.$$

若 σ 是 H 到 H$'$ 的同构映射, 则 $\sigma(R) = R'$.

证明 易见, 映射 $D \mapsto \sigma D \sigma^{-1}$, $\forall D \in \mathrm{Der}\,(\mathrm{H})$, 是 $\mathrm{Der}\,(\mathrm{H})$ 到 $\mathrm{Der}\,(\mathrm{H}')$ 的同构映射, 于是 $\mathrm{Der}\,(\mathrm{H}) \cong \mathrm{Der}\,(\mathrm{H}')$. 从而 $I(\mathrm{hg}(\,\mathrm{Der}\,(\mathrm{H}'))) = I(\mathrm{hg}(\,\mathrm{Der}\,(\mathrm{H}))) = s$. 由定理 3.7 知

$$\sigma(\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\,\mathrm{ad}\,\mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E)\})\sigma^{-1} = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\,\mathrm{ad}\,\mathrm{D_H}(x^{(\pi')}x^{E'})\}.$$

直接验证知

$$R = \left\{y \in \mathrm{H} \mid (\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\,\mathrm{ad}\,\mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E)\})(y) = 0\right\},$$

$$R' = \left\{ y \in \mathrm{H}' \mid \left(\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\, \mathrm{ad}\, \mathrm{D_H}(x^{(\pi')}x^{E'})\}\right)(y) = 0 \right\}.$$

则有

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\, \mathrm{ad}\, \mathrm{D_H}(x^{(\pi')}x^{E'})\}\right)\left(\sigma(R)\right) \\
&= \sigma\left(\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\, \mathrm{ad}\, \mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^{E})\}\right)\sigma^{-1}\left(\sigma(R)\right) \\
&= \sigma\left(\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\, \mathrm{ad}\, \mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^{E})\}\right)(R) \\
&= \sigma\Big(\left(\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\, \mathrm{ad}\, \mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^{E})\}\right)(R)\Big) \\
&= \sigma(0) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

所以 $\sigma(R) \subseteq R'$. 同理 $\sigma^{-1}(R') \subseteq R$, 从而 $R' \subseteq \sigma(R)$. 因此 $\sigma(R) = R'$. □

设 $\mathrm{H} = \mathrm{H}_{(-1)} \supseteq \mathrm{H}_{(0)} \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{H}_{(\xi-3)} \supseteq \mathrm{H}_{(\xi-2)} = 0$ 是 H 的自然滤过, 则 $\mathrm{H}_{(0)} = R$. 相仿于引理 2.9 的 2) 可证得

$$\mathrm{H}_{(i)} = \left\{ x \in \mathrm{H}_{(i-1)} \mid [x, \mathrm{H}] \subseteq \mathrm{H}_{(i-1)} \right\}, \ \forall i \geq 1. \tag{3.8}$$

同理, 对 $\mathrm{H}' = \mathrm{H}(m', n', \underline{t}')$ 的自然滤过, 也有 $\mathrm{H}'_{(0)} = R'$,

$$\mathrm{H}'_{(i)} = \left\{ x \in \mathrm{H}'_{(i-1)} \mid [x, \mathrm{H}'] \subseteq \mathrm{H}'_{(i-1)} \right\}, \ \forall i \geq 1. \tag{3.8$'$}$$

由命题 3.8, 等式 (3.8) 与等式 (3.8′) 可得以下命题.

命题 3.9 *若 σ 是 H 到 H′ 的同构映射, 则 $\sigma(\mathrm{H}_{(i)}) = \mathrm{H}'_{(i)}$, $\forall i \geq -1$.*

由命题 3.9 可得以下定理.

定理 3.10 *H 的自然滤过是不变的.*

定理 3.11 *$\mathrm{H}(m, n, \underline{t}) \cong \mathrm{H}(m', n', \underline{t}')$ 当且仅当 $m = m'$, $n = n'$, 并且*

$$\left\{\{t_1, t_{1'}\}, \cdots, \{t_r, t_{r'}\}\right\} = \left\{\{t'_1, t'_{1'}\}, \cdots, \{t'_r, t'_{r'}\}\right\}.$$

证明 充分性是显然的. 下面证明必要性. 仍设 $\mathrm{H} = \mathrm{H}(m, n, \underline{t})$, $\mathrm{H}' = \mathrm{H}(m', n', \underline{t}')$. 完全仿照引理 2.11, 2.13 与定理 2.14 的证明可知, 存在 H 到 H′ 的同构映射 ψ, 使得 $\psi(\mathrm{H}_i) = \mathrm{H}'_i$, $\forall i \geq -1$. 于是 $\psi(\mathrm{H}_{-1} \cap \mathrm{H}_{\bar{0}}) = \mathrm{H}'_{-1} \cap \mathrm{H}'_{\bar{0}}$. 考察维数可知, $m = m'$. 由 $\psi(\mathrm{H}_{-1} \cap \mathrm{H}_{\bar{1}}) = \mathrm{H}'_{-1} \cap \mathrm{H}'_{\bar{1}}$ 可知, $n = n'$. 相仿于定理 2.14 的证明, 进而可得 $\mathrm{H}(m, \underline{t}) \cong \mathrm{H}(m, \underline{t}')$. 由李代数的结果知 (见文献 [16]),

$$\left\{\{t_1, t_{1'}\}, \cdots, \{t_r, t_{r'}\}\right\} = \left\{\{t'_1, t'_{1'}\}, \cdots, \{t'_r, t'_{r'}\}\right\}.$$

定理得证. □

§4　K 的不可缩滤过

下面讨论李超代数 $\mathrm{K}(m,n,\underline{t})$ 的滤过不变性, 其中 $m=2r+1$ 是奇数. 简记 $\mathrm{K}(m,n,\underline{t})$ 为 K. 由第二章 §5 节知 $\mathrm{K}=\bigoplus_{i=-2}^{\lambda}\mathrm{K}_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数, 其中

$$\mathrm{K}_i=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(\alpha)}x^u \mid i=\|\alpha\|+|u|-2\}.$$

令 $\mathrm{K}_{(j)}=\bigoplus_{i\geq j}\mathrm{K}_i$, 则 $\{\mathrm{K}_{(j)}\mid j\geq -2\}$ 是 K 的一个下降的滤过, 并且 $\mathrm{K}_{(\lambda+1)}=0$. 这里, 当 $n-m-3\not\equiv 0 \pmod p$ 时, $\lambda=\|\pi\|+n-2$; 当 $n-m-3\equiv 0 \pmod p$ 时, $\lambda=\|\pi\|+n-3$. 沿用特征零域上无限维 K 型李代数的名称, 我们称 K 的此滤过为不可缩滤过(noncontractable filtration).

引理 4.1　设 $f\in \mathrm{hg}(\mathrm{K})$, $f\neq 0$. 若 $f\notin \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(\pi)}x^E\}$, 则 K 中有基元素 y_1 与 y_2, $\mathrm{zd}(y_i)\geq 0$, $i=1,2$, 使得 $[f,y_1],[f,y_2]$ 线性无关.

证明　1) 设 $\mathrm{D}_t(f)=0$, $\forall t\in Y_1$. 则 f 的每一项均为 $k_\alpha x^{(\alpha)}$ 的形式, 其中 $k_\alpha\in\mathbb{F}$. 于是 f 仅有以下两种情形.

(i) $\mathrm{zd}(f)=\|\pi\|-2$. 则 $f=ax^{(\pi)}$, 其中 $0\neq a\in\mathbb{F}$. 不妨设 $f=x^{(\pi)}$. 我们有

$$z_1:=[f,x_1x_{m+1}]=-x^{(\pi-\varepsilon_{1'})}x_{m+1}\neq 0,$$

$$z_2:=[f,x_{1'}x_{m+1}]=x^{(\pi-\varepsilon_1)}x_{m+1}\neq 0.$$

显然 z_1,z_2 线性无关.

(ii) $\mathrm{zd}(f)<\|\pi\|-2$. 可设 $f=\sum_{\alpha\in\Delta}k_\alpha x^{(\alpha)}$, 其中 $\Delta\subseteq A(m,\underline{t})$, $k_\alpha\in\mathbb{F}$, 并且 $k_\alpha\neq 0,\forall\alpha\in\Delta$. 取 $i,j\in Y_1$, 并且 $i\neq j$. 设 $\lambda_\alpha=2-\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i$, 则有

$$z_1:=[f,x_m]=\sum_{\alpha\in\Delta}k_\alpha(\lambda_\alpha-2\alpha_m)x^{(\alpha)},$$

$$z_2:=[f,x_mx_i]=\sum_{\alpha\in\Delta}k_\alpha(\lambda_\alpha-\alpha_m)x^{(\alpha)}x_i,$$

$$z_3:=[f,x_mx_ix_j]=\sum_{\alpha\in\Delta}k_\alpha\lambda_\alpha x^{(\alpha)}x_ix_j.$$

若存在 $\alpha\in\Delta$, 使得 $\alpha_m\not\equiv 0 \pmod p$, 则 $\lambda_\alpha-2\alpha_m,\lambda_\alpha-\alpha_m$ 与 λ_α 中至少有两个整数不是 p 的倍数. 因此 z_1,z_2 与 z_3 中至少有两个是非零的. 显然,z_1,z_2 与 z_3 中非零元是线性无关的.

假设对任意 $\alpha\in\Delta$, 均有 $\alpha\equiv 0 \pmod p$. 若存在 $\alpha\in\Delta$, 使得 $\lambda_\alpha\not\equiv 0 \pmod p$, 显然此时 z_1,z_2 与 z_3 均不为零. 于是他们中任意两个都是线性无关的. 若对任意 $\alpha\in\Delta$, 均有 $\lambda_\alpha\equiv 0 \pmod p$, 任取 $\alpha\in\Delta$, 则存在 $i\in\{1,\cdots,m-1\}$, 使得 $\alpha_i\neq 0$. 取 $j\in Y_1$, 则有

$$[f,x_mx_{i'}]=k_\alpha\sigma(i)x^{(\alpha-\varepsilon_i)}x_m+\cdots\neq 0,$$

$$[f, x_{i'}x_j] = k_\alpha \sigma(i) x^{(\alpha-\varepsilon_i)} x_j + \cdots \neq 0.$$

考察 $\mathbb{Z}$- 次数知, $[f, x_m x_{i'}]$ 与 $[f, x_{i'}x_j]$ 是线性无关的.

2) 存在 $t \in Y_1$, 使得 $\mathrm{D}_t(f) \neq 0$. 则 f 只有以下两种情形.

(a) $\mathrm{D}_i^{\pi_i}(f) \neq 0$, $\forall i \in Y_0$. 因为 f 是 $\mathbb{Z}$- 齐次元素, 且 $f \notin \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(\pi)}x^E\}$, 所以存在 $j \in Y_1$, 使得 $\mathrm{D}_j(f) = 0$. 故可设 $f = x^{(\pi)}x^u + \cdots$, 其中 $u \neq \varnothing$, $u \neq E$, 并且 $j \notin \{u\}$. 则有

$$z_1 := [f, x_1 x_j] = -x^{(\pi-\varepsilon_{1'})} x^u x_j + \cdots \neq 0,$$

$$z_2 := [f, x_{1'} x_j] = x^{(\pi-\varepsilon_1)} x^u x_j + \cdots \neq 0.$$

易见, z_1 中不含项 $a x^{(\pi-\varepsilon_1)} x^u x_j$, 其中 $0 \neq a \in \mathbb{F}$, 所以 z_1, z_2 线性无关.

(b) 存在 $i \in Y_0$, 使得 $\mathrm{D}_i^{\pi_i}(f) = 0$. 若 $\mathrm{D}_j(f) \neq 0$, $\forall j \in Y_1$, 则可设 $f = x^{(\alpha)}x^E + \cdots$, 其中 $\alpha_i < \pi_i$. 于是存在 $k (0 \leq k \leq t_i)$, 使得 $x^{(\alpha)} x^{(p^k \varepsilon_i)} \neq 0$. 则

$$z_1 := [f, x^{(p^k\varepsilon_i)} x_{m+1}] = (-1)^n x^{(\alpha)} x^{(p^k\varepsilon_i)} x^{E-\langle m+1\rangle} + \cdots \neq 0,$$

$$z_2 := [f, x^{(p^k\varepsilon_i)} x_{m+2}] = (-1)^{n+1} x^{(\alpha)} x^{(p^k\varepsilon_i)} x^{E-\langle m+2\rangle} + \cdots \neq 0.$$

易见, z_1, z_2 线性无关.

若存在 $j \in Y_1$, 使得 $\mathrm{D}_j(f) = 0$, 则可设

$$f = x^{(\alpha)} x^u + \sum_{\beta, v} a_{\beta v} x^{(\beta)} x^v,$$

其中 $a_{\beta v} \in \mathbb{F}$, $u \neq \varnothing$. 由 $\mathrm{D}_j(f) = 0$ 知, $j \notin \{u\}$, $j \notin \{v\}$. 由 $\mathrm{D}_i^{\pi_i}(f) = 0$ 知, $\alpha_i, \beta_i < \pi_i$. 设 $l \in \{u\}$, 由定义 1.5 知,

$$\mathrm{D}_l(x^u) = \mathrm{sgn}(\langle l\rangle,\ u - \langle l\rangle) x^{u-\langle l\rangle}.$$

所以

$$z_1 := [f, x_l x_j] = (-1)^{|u|} \mathrm{sgn}(\langle l\rangle,\ u - \langle l\rangle) x^{(\alpha)} x^{u-\langle l\rangle} x_j + \cdots \neq 0.$$

由 $\alpha_i < \pi_i$ 知, 存在 $k \in \{0, 1, \cdots, t_i - 1\}$, 使得 $x^{(\alpha)} x^{(p^k\varepsilon_i)} \neq 0$. 则有

$$z_2 := [f, x^{(p^k\varepsilon_i)} x_l] = (-1)^{|u|} \mathrm{sgn}(\langle l\rangle,\ u - \langle l\rangle) x^{(\alpha)} x^{(p^k\varepsilon_i)} x^{u-<l>} + \cdots \neq 0.$$

易见, z_1, z_2 线性无关. 引理得证. □

我们仍设 $J = Y\backslash\{m\}$, $J_0 = Y_0\backslash\{m\}$.

引理 4.2 设 $n - m - 3 \neq 0 \pmod p$, $0 \neq f \in \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(\pi)}x^E\}$. 则 $I(\mathrm{ad} f) = s + 1$.

证明 设 $x^{(\alpha)}x^u \in \mathrm{K}_0$, 并且 $x^{(\alpha)}x^u \neq x_m$. 直接计算知 $[x^{(\pi)}x^E . x^{(\alpha)}x^u] = 0$. 因为

$$[x^{(\pi)}x^E, x_m] = -(n - m - 3) x^{(\pi)} x^E \neq 0,$$

$$[x^{(\pi)}x^E, x_i] = \sigma(i') x^{(\pi-\varepsilon_{i'})} x^E \neq 0,\ \forall i \in J_0,$$

$$[x^{(\pi)}x^E, 1] = -2x^{(\pi-\varepsilon_m)}x^E \neq 0,$$

$$[x^{(\pi)}x^E, x_i] = (-1)^n \mathrm{sgn}(\langle i\rangle,\ E-\langle i\rangle)x^{(\pi)}x^{E-\langle i\rangle} \neq 0,\ \forall i \in Y_1,$$

所以 $I(\mathrm{ad}\,(x^{(\pi)}x^E)) = s+1$. 于是引理结论成立. □

定理 4.3 设 $n-m-3 \not\equiv 0 \pmod p$, $f \in \mathrm{hg(K)}$ 且 $f \notin \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(\pi)}x^E\}$. 则 $I(\mathrm{ad}\,f) > s+1$.

证明 由引理 3.1, 我们可用 $\lambda(f)$ 代替 f. 因此可设 f 是 $\mathbb{Z}$- 齐次元素.

(i) 先证明 $[f,1]=0$ 的情形. 由 $[f,1]=0$ 知 $\mathrm{D}_m(f)=0$. 令

$$R = \big\{i \mid i \in J_0,\ [f,x_i]=0\big\},$$

$$R_1 = \big\{i \mid i \in Y_1,\ [f,x_i]=0\big\}.$$

(a) 若 $R\cup R_1 = J$, 则 $\mathrm{D}_i(f)=0$, $\forall i\in J$. 又因为 $\mathrm{D}_m(f)=0$, 故可设 $f=1$. 则有

$$[f, x^{(\alpha)}x^u] = [1, x^{(\alpha)}x^u] = 2x^{(\alpha-\varepsilon_m)}x^u,$$

所以 $I(\mathrm{ad}\,f) \geq (p-1)p^{m-1}2^n > m+n+1 = s+1$.

(b) 设 $R_1=\varnothing$, $|R|\leq 1$. 若 $|R|=0$, 即 $R=\varnothing$, 则 $\big\{[f,x_i] \mid i\in J\big\}$ 是线性无关的. 若 $|R|=1$, 可设 $R=\{l\}$, 则 $\big\{[f,x_i] \mid i \in J\backslash\{l\}\big\}$ 是线性无关的.

如果 $2f-\sum_{i\in J}x_i\mathrm{D}_i(f)\neq 0$, 因为 $\mathrm{D}_m(f)=0$, 故

$$\mathrm{D}_m\Big(f-\sum_{i\in J}x_i\mathrm{D}_i(f)\Big)=0.$$

由引理 3.2 知

$$[f, x^{(k\varepsilon_m)}] = \Big(2f-\sum_{j\in J}x_i\mathrm{D}_i(f)\Big)x^{((k-1)\varepsilon_m)} \neq 0,$$

其中 $k=1,2,\cdots,p-1$. 若 $2f-\sum_{i\in J}x_i\mathrm{D}_i(f)=0$, 则对任意 $j\in Y_1$, 由 $R_1=\varnothing$ 知 $\mathrm{D}_j(f)\neq 0$. 由引理 3.2 知

$$[f, x^{(k\varepsilon_m)}x_j] = (-1)^{\mathrm{d}(f)}\mathrm{D}_j(f)x^{(k\varepsilon_m)} \neq 0,$$

其中 $k=1,2,\cdots,p-1$. 于是

$$I(\mathrm{ad}\,f) \geq (s-2)+(p-1) \geq s-2+4 > s+1.$$

(c) 设 $\varnothing \neq R\cup R_1 \neq J$, 置 $J'=\{i\in R \mid i'\in R\}$. 则可设 $J'=\{i_1,i_1',\cdots,i_u,i_u'\}$. 令 $J_1 = R\backslash J' = \{i_{u+1},\cdots,i_{u+t}\}$, $R_1=\{j_1,\cdots,j_h\}$. 设 $J_2=\{i'_{u+1},\cdots,i'_{u+k}\}$, $\overline{J} = J\backslash(R\cup R_1\cup J_2)$. 令

$$x^{(\gamma)} = \prod_{k\in J'} x^{(\gamma_k\varepsilon_k)}\quad,\quad \gamma_k = 0,1,\cdots,p-1,$$

$$x^q = \prod_{j\in R_1} x_j^{q_j}\quad,\qquad q_j=0,1.$$

对任意 $l \in J_2$, 任意 $\beta_l \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$, 有

$$[f, x^{(\gamma)} x^q x^{(\beta_l \varepsilon_l)}] = \sigma(l')\mathrm{D}_l(f) x^{(\gamma)} x^q x^{(\beta_l \varepsilon_l - \varepsilon_l)}; \tag{4.1}$$

对任意 $v \in \overline{J}$, 则有

$$[f, x^{(\gamma)} x^q x_v] = \sigma(v')(-1)^{\tau(v')\mathrm{d}(f)} x^{(\gamma)} x^q. \tag{4.2}$$

由引理 3.2, 相仿于定理 3.5 中相应的讨论知, (4.1) 与 (4.2) 式右边的元素不为零, 并且所有这些不为零的元素是线性无关的. 从而可得

$$\begin{aligned} I(\operatorname{ad} f) &\geq p^{2u} 2^h (p-1)t + p^{2u} 2^h (s - 1 - 2u - 2t - h) \\ &\geq p^{2u} 2^h \big(s - 1 - 2u - h + (p-3)t\big). \end{aligned}$$

设 $2u + h > 0$. 若 $t > 0$, 则由 $s \geq 4$ 可知

$$\begin{aligned} I(\operatorname{ad} f) &\geq 2^{2u+h}\big(s - 1 - (2u+h) + (p-3)t\big) \\ &= 2^{2u+h}\big(s - (2u+h)\big) + 2^{2u+h}\big((p-3)t - 1\big) \\ &\geq 2(s-1) + 2 \ = \ 2s \ > \ s+1. \end{aligned}$$

若 $t = 0$, 由于 $s \geq 4$, 则有

$$\begin{aligned} I(\operatorname{ad} f) &\geq p^{2u} 2^h \big(s - 1 - (2u+h)\big) \\ &= \big((p-2) + 2\big)^{2u} 2^h \big(s - 1 - (2u+h)\big) \\ &\geq (p-2)^{2u} 2^h \big(s - 1 - (2u+h)\big) + 2^{2u+h}\big(s - 1 - (2u+h)\big) \\ &\geq 2\Big(2^{2u+h}\big(s - 1 - (2u+h)\big)\Big) \\ &\geq 2\big(2(s-2)\big) \ = \ 4(s-2) \ = \ s + (3s-8) \ > \ s+1. \end{aligned}$$

设 $2u + h = 0$, 则 $u = h = 0$. 因为 $R \cup R_1 \neq \varnothing$, 所以 $t > 0$. 若 $t > 1$, 则 $I(\operatorname{ad} f) \geq (s-1)+(p-3)t \geq s-1+4 > s+1$. 若 $t = 1$, 则 $R_1 = \varnothing$, $|R| = 1$. 由 (b) 知 $I(\operatorname{ad} f) > s+1$.

(ii) $[f, 1] \neq 0$ 的情形. 设 $i \in Y_1$. 若 $[f, x_i] = 0$, 则

$$\begin{aligned} 0 \neq [f, 1] &= -\big[f, [x_i, x_i]\big] \\ &= -\big[[f, x_i], x_i\big] - (-1)^{\mathrm{d}(f)}\big[x_i, [f, x_i]\big] = 0. \end{aligned}$$

此为矛盾, 故 $[f, x_i] \neq 0$. 令 $R = \big\{i \in J_0 \mid [f, x_i] = 0\big\}$.

(a) $R \neq \varnothing$ 的情形. 设 $i \in R$. 若 $i' \in R$, 则有

$$\begin{aligned} \sigma(i)[f, 1] \ &= \big[f, [x_i, x_{i'}]\big] \\ &= \big[[f, x_i], x_{i'}\big] + \big[x_i, [f, x_{i'}]\big] = 0. \end{aligned}$$

此与 $[f,1]\neq 0$ 矛盾, 于是 $i'\notin R$. 不妨设 $R=\{1,2,\cdots,t\}$. 令 $J=\{i,i'\mid i=1,\cdots,t\}$, $J_1=Y\backslash J$. 令

$$G=\{k_1\varepsilon_{1'}+\cdots+k_t\varepsilon_{t'}\mid 0\le k_i\le p-1,\ i=1,\cdots,t\}.$$

任取 $g\in \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(\alpha)}\mid \alpha\in G\}$, 我们断言: 若 $[f,g]=0$, 则 $g=0$. 否则, 若 $g\neq 0$, 取 $g\in \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(\alpha)}\mid \alpha\in G\}$, 使得 $[f,g]=0$, 并且 $\mathrm{zd}(g)$ 最小. 若 $\mathrm{zd}(g)=-2$, 可设 $g=1$, 则 $[f,1]=0$, 矛盾. 若 $\mathrm{zd}(g)>-2$, 则存在 $i\in\{1,\cdots,t\}$, 使得 $\mathrm{D}_{i'}(g)\neq 0$. 于是

$$\begin{aligned}0&=\big[x_i,[f,g]\big]=\big[[x_i,f],g\big]+(-1)^{\mathrm{d}(x_i)\mathrm{d}(f)}\big[f,[x_i,g]\big]\\&=\big[f,[x_i,g]\big]=[f,\sigma(i)\mathrm{D}_{i'}(g)].\end{aligned}$$

所以 $[f,\mathrm{D}_{i'}(g)]=0$, 此与 $\mathrm{zd}(g)$ 的最小性矛盾, 因此断言成立. 易见 $[f,x_j]\neq 0$, $\forall j\in J_1$. 因为 $|G|=p^t$, $|J_1|=m+n-1-2t$, 所以

$$\begin{aligned}I(\mathrm{ad}\,f)&\ge p^t+(m+n-1-2t)\\&\ge 1+t(p-1)+(m+n-1-2t)\\&=m+n+(p-3)t\\&\ge m+n+2t>s+1.\end{aligned}$$

(b) 设 $R=\varnothing$, 则 $[f,x_i]\neq 0$, $\forall i\in J_0$. 由引理 4.1 知, 存在基元素 b_1 与 b_2, $\mathrm{zd}(b_j)\ge 0$, $j=1,2$, 使得 $[f,b_1]$ 与 $[f,b_2]$ 线性无关. 于是

$$\big\{[f,1],[f,x_i],[f,b_j]\mid i\in J,\ j=1,2\big\}$$

是线性无关的, 所以 $I(\mathrm{ad}\,f)>s+1$. □

引理 4.4 设 $n-m-3\not\equiv 0 \pmod p$, 并令 $T=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(\pi)}x^E\}$. 则 $\mathrm{Nor}_{\mathrm{K}}(T)=\mathrm{K}_{(0)}$.

证明 任取 $x^{(\alpha)}x^u\in \mathrm{K}_{(0)}$, 则 $\|\alpha\|+|u|\ge 2$. 若 $x^{(\alpha)}x^u\neq x_m$, 易见 $[x^{(\alpha)}x^u,x^{(\pi)}x^E]=0\in T$. 又因为 $[x_m,x^{(\pi)}x^E]=(n-m-3)x^{(\pi)}x^E\in T$, 所以 $\mathrm{K}_{(0)}\subseteq \mathrm{Nor}_{\mathrm{K}}(T)$. 反之, 若 $y\in \mathrm{Nor}_{\mathrm{K}}(T)$, 则可设 $y=y_{-2}+y_{-1}+y_0$, 其中 $y_{-2}\in \mathrm{K}_{-2}=\mathbb{F}1$, $y_{-1}\in \mathrm{K}_{-1}$, $y_0\in \mathrm{K}_{(0)}$. 由 $[y_{-2}+y_{-1}+y_0,x^{(\pi)}x^E]\in T$ 可推得 $y_{-2}=0$, $y_{-1}=0$, 所以 $y\in \mathrm{K}_{(0)}$, 于是 $\mathrm{Nor}_{\mathrm{K}}(T)\subseteq \mathrm{K}_{(0)}$. 因此 $\mathrm{Nor}_{\mathrm{K}}(T)=\mathrm{K}_{(0)}$. □

设 $\mathrm{K}'=\mathrm{K}(m',n',\underline{t}')$. 令 $\pi'=(\pi'_1,\cdots,\pi'_m)$, $E'=\langle m'+1,\cdots,m'+n'\rangle$, 并设 $T'=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(\pi')}x^{E'}\}$. 由引理 4.4 知, $\mathrm{Nor}_{\mathrm{K}'}(T')=\mathrm{K}'_{(0)}$.

引理 4.5 设 $n-m-3\not\equiv 0 \pmod p$. 若 σ 是 K 到 K′ 的同构映射, 则 $\sigma(\mathrm{K}_{(0)})=\mathrm{K}'_{(0)}$.

证明 由引理 4.2 与定理 4.3 知, $\sigma(T)=T'$. 因为

$$[x,T]\subseteq T\iff [\sigma(x),\sigma(T)]\subseteq \sigma(T),\ \forall x\in \mathrm{K},$$

所以, 由引理 4.4 知

$$\sigma(\mathrm{K}_{(0)})\ =\sigma\big(\mathrm{Nor}_{\mathrm{K}}(T)\big)=\sigma\big\{x\in \mathrm{K}\mid [x,T]\subseteq T\big\}$$

$$= \{\sigma(x) \in \mathrm{K}' \mid [x, T] \subseteq T\} = \{\sigma(x) \in \mathrm{K}' \mid [\sigma(x), T'] \subseteq T'\}$$
$$= \{x \in \mathrm{K}' \mid [x, T'] \subseteq T'\} = \mathrm{Nor}_{\mathrm{K}'}(T') = \mathrm{K}'_{(0)}. \qquad \square$$

令 $\rho : \mathrm{K}_{(0)} \to \mathrm{pl}(\mathrm{K}/\mathrm{K}_{(0)})$ 是映射, 使得

$$\rho(x)(y + \mathrm{K}_{(0)}) := [x, y] + \mathrm{K}_{(0)}, \ \forall x \in \mathrm{K}_{(0)}, \ \forall y \in \mathrm{K}.$$

直接验证可知, ρ 是 $\mathrm{K}_{(0)}$ 在空间 $\mathrm{K}/\mathrm{K}_{(0)}$ 上的一个表示.

引理 4.6 $\mathrm{K}_{(-1)}/\mathrm{K}_{(0)}$ 是 $\rho(\mathrm{K}_{(0)})$ 的惟一的极小不变子空间 (这里的不变子空间为非零的不变子空间).

证明 显然 $\mathrm{K}_{(-1)}/\mathrm{K}_{(0)}$ 是 $\rho(\mathrm{K}_{(0)})$ 的不变子空间. 设 M 是 $\rho(\mathrm{K}_{(0)})$ 的一个不变子空间. 任取 $y + \mathrm{K}_{(0)} \in M$, 可设 $y = 1 + y'$, 其中 $y' \in \mathrm{K}_{-1}$. 则

$$[x_i x_m, 1 + y'] + \mathrm{K}_{(0)} \in M, \ \forall i \in J_0,$$

所以 $[x_i x_m, 1] + \mathrm{K}_{(0)} \in M$. 于是 $x_i + \mathrm{K}_{(0)} \in M$, $\forall i \in J_0$. 故 $\mathrm{K}_{(-1)}/\mathrm{K}_{(0)} \subseteq M$, 从而 $\mathrm{K}_{(-1)}/\mathrm{K}_{(0)}$ 是 $\rho(\mathrm{K}_{(0)})$ 的惟一的极小不变子空间. $\square$

引理 4.7 设 σ 是 K 到 K′ 的同构映射. 若 $\sigma(\mathrm{K}_{(0)}) = \mathrm{K}'_{(0)}$, 则 $\sigma(\mathrm{K}_{(-1)}) = \mathrm{K}'_{(-1)}$.

证明 与 ρ 的定义相同, 我们可定义 $\mathrm{K}'_{(0)}$ 在空间 $\mathrm{K}'/\mathrm{K}'_{(0)}$ 上的表示 ρ'. 由引理 4.6 可知, $\mathrm{K}'_{(-1)}/\mathrm{K}'_{(0)}$ 是 $\rho'(\mathrm{K}'_{(0)})$ 的惟一的极小不变子空间. 因为 $\mathrm{K}_{(-1)}/\mathrm{K}_{(0)}$ 是 $\rho(\mathrm{K}_{(0)})$ 的极小不变子空间, 所以 $\sigma(\mathrm{K}_{(-1)})/\sigma(\mathrm{K}_{(0)})$ 是 $\rho'(\sigma(\mathrm{K}_{(0)}))$ 的极小不变子空间. 由已知, $\sigma(\mathrm{K}_{(0)}) = \mathrm{K}'_{(0)}$, 故 $\sigma(\mathrm{K}_{(-1)})/\mathrm{K}'_{(0)}$ 是 $\rho'(\mathrm{K}'_{(0)})$ 的极小不变子空间. 由惟一性知,

$$\sigma(\mathrm{K}_{(-1)})/\mathrm{K}'_{(0)} = \mathrm{K}'_{(-1)}/\mathrm{K}'_{(0)}.$$

因为 $\sigma(\mathrm{K}_{(-1)}) \supseteq \sigma(\mathrm{K}_{(0)}) = \mathrm{K}'_{(0)}$, 所以 $\sigma(\mathrm{K}_{(-1)}) = \mathrm{K}'_{(-1)}$. $\square$

相仿于引理 2.9 的 2) 可证得以下等式:

$$\mathrm{K}_{(i)} = \{x \in \mathrm{K}_{(i-1)} \mid [x, \mathrm{K}_{(-1)}] \subseteq \mathrm{K}_{(i-1)}\}, \ \forall i \geq 1, \tag{4.3}$$
$$\mathrm{K}'_{(i)} = \{x \in \mathrm{K}'_{(i-1)} \mid [x, \mathrm{K}'_{(-1)}] \subseteq \mathrm{K}'_{(i-1)}\}, \ \forall i \geq 1. \tag{4.4}$$

由引理 4.5, 4.7 与等式 (4.3), (4.4) 可得以下命题.

命题 4.8 设 $n - m - 3 \neq 0 \pmod p$. 若 σ 是 K 到 K′ 的同构映射, 则 $\sigma(\mathrm{K}_{(i)}) = \mathrm{K}'_{(i)}$, $\forall i \geq -2$.

以下定理是命题 4.8 的直接结果.

定理 4.9 设 $n - m - 3 \neq 0 \pmod p$, 则 K 的不可缩滤过是不变的.

设 $n - m - 3 \equiv 0 \pmod p$. 令 $\overline{\mathrm{K}} = \mathrm{K} \oplus \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(\pi)} x^E\}$. 由第一章引理 2.17 知, $\mathrm{K} = [\overline{\mathrm{K}}, \overline{\mathrm{K}}]$. 从而 K 是李超代数 $\overline{\mathrm{K}}$ 的理想. 特别地, $\mathrm{ad}\,(x^{(\pi)} x^E)(\mathrm{K}) \subseteq \mathrm{K}$.

命题 4.10 设 $n - m - 3 \equiv 0 \pmod p$, 则 $I\Big(\mathrm{hg}(\mathrm{Der}\,(\mathrm{K}))\Big) = s$. 设 $\mathrm{D} \in \mathrm{hg}(\mathrm{Der}\,(\mathrm{K}))$, 则 $I(\mathrm{D}) = s$ 当且仅当

$$0 \neq \mathrm{D} \in \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\Big\{ \mathrm{ad}\,(x^{(\pi)} x^E)\big|_{\mathrm{K}} \Big\}.$$

证明　利用 $[x^{(\pi)}x^E, x_m] = -(n-m-3)x^{(\pi)}x^E = 0$, 由引理 3.3 的证明可知: 若 $0 \neq \mathrm{D} \in \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\Big\{ \mathrm{ad}\,(x^{(\pi)}x^E)\big|_{\mathrm{K}}\Big\}$, 则 $I(\mathrm{D}) = m + n = s$. 于是 $I\Big(\mathrm{hg}(\,\mathrm{Der}\,(\mathrm{K}))\Big) \leq s$. 令 $\mathrm{D} \in \mathrm{hg}(\,\mathrm{Der}\,(\mathrm{K}))$, 并且 $I(\mathrm{D}) \leq s$. 由第二章定理 5.17, 可设

$$\mathrm{D} = \mathrm{ad}\, f + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{t_i-1} c_{ij}(\,\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_i)^{p^j},$$

其中 $f \in \overline{\mathrm{K}}$, $c_{ij} \in \mathbb{F}$. 下面用定理 3.7 的方法证明 $c_{ij} = 0$. 假设 $c_{lj} \neq 0$, 令 $r = \max\{j \mid c_{lj} \neq 0\}$. 设

$$G = \Big\{\alpha \in A(m,\underline{t}) \mid \alpha_l = p^r,\ p^{t_i-1} \leq \alpha_i \leq \pi_i,\ \forall i \in Y_0\backslash\{l\}\Big\}.$$

任取 $\alpha \in G$, 则

$$\mathrm{D}(x^{(\alpha)}x^u) = c_{lr}x^{(\alpha - p^r\varepsilon_l)}x^u + y,$$

其中 y 是 $\{x^{(\beta)}x^v \mid \beta_l \neq 0\}$ 中某些元素的 $\mathbb{F}$- 线性组合. 由引理 3.6 知

$$\Big\{c_{lr}x^{(\alpha-p^r\varepsilon_l)}x^u + y \mid \alpha \in G,\ u \in B(n)\Big\}$$

是线性无关的. 于是 $I(\mathrm{D}) \geq (p-1)^{m-1}2^n > s$. 此与 $I(\mathrm{D}) \leq s$ 矛盾, 故 $c_{ij} = 0$. 因此 $\mathrm{D} = \mathrm{ad}\, f$, 其中 $f \in \overline{\mathrm{K}}$. 于是仿照定理 4.3 的证明知: 若 $f \notin \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(\pi)}x^E\}$, 则 $I(\,\mathrm{ad}\, f) > s$. 从而,$I(\mathrm{D}) = s$ 当且仅当 $0 \neq \mathrm{D} \in \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\Big\{ \mathrm{ad}\,(x^{(\pi)}x^E)\big|_{\mathrm{K}}\Big\}$.　□

引理 4.11　设 $n - m - 3 \equiv 0 \pmod p$. 若 σ 是 K 到 K′ 的同构映射, 则 $\sigma(\mathrm{K}_{(0)}) = \mathrm{K}'_{(0)}$.

证明　设 $R = \mathrm{K}_{(0)}$, $R' = \mathrm{K}'_{(0)}$. 由 $n - m - 3 \equiv 0 \pmod p$ 可知, $[x^{(\pi)}x^E, x_m] = 0$. 于是可得以下等式

$$R = \Big\{y \in \mathrm{K} \mid (\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(\pi)}x^E\})(y) = 0\Big\},$$
$$R' = \Big\{y \in \mathrm{K}' \mid \big(\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(\pi')}x^{E'}\}\big)(y) = 0\Big\}.$$

利用命题 4.10, 相仿于命题 3.8 的证明, 可证得 $\sigma(R) = R'$, 即 $\sigma(\mathrm{K}_{(0)}) = \mathrm{K}'_{(0)}$.　□

命题 4.12　设 $n - m - 3 \equiv 0 \pmod p$, σ 是 K 到 K′ 的同构映射. 则 $\sigma(\mathrm{K}_{(i)}) = \mathrm{K}'_{(i)}$, $\forall i \geq -2$.

证明　由命题 4.11 知 $\sigma(\mathrm{K}_{(0)}) = \mathrm{K}'_{(0)}$. 于是由引理 4.7 知, $\sigma(\mathrm{K}_{(-1)}) = \mathrm{K}'_{(-1)}$. 因为等式 (4.3) 与 (4.4) 在 $n - m - 3 \equiv 0 \pmod p$ 时也成立, 所以可得 $\sigma(\mathrm{K}_{(i)}) = \mathrm{K}'_{(i)}$, $\forall i \geq 1$.　□

以下定理是命题 4.12 的直接结果.

定理 4.13　设 $n - m - 3 \equiv 0 \pmod p$, 则 K 的不可缩滤过是不变的.

定理 4.14　$\mathrm{K}(m,n,\underline{t}) \cong \mathrm{K}(m',n',\underline{t}')$ 当且仅当 $m = m'$, $n = n'$, $t_m = t'_m$ 与

$$\big\{\{t_1,t_{1'}\},\cdots,\{t_r,t_{r'}\}\big\} = \big\{\{t'_1,t'_{1'}\},\cdots,\{t'_r,t'_{r'}\}\big\}. \tag{4.5}$$

证明 充分性是显然的. 利用命题 4.8 与 4.12, 相仿于定理 2.14 与定理 3.11 的证明, 可证得 $m = m'$, $n = n'$, 并且李代数 $\mathrm{K}(m,\underline{t})$ 与 $\mathrm{K}(m,\underline{t}')$ 同构. 由李代数的结果知 (见文献 [51]), 有 $t_m = t'_m$, 并且 (4.5) 式成立. □

第四章　李超代数的结合型

我们知道, 特征零的有限维单李代数均具有非退化的结合型. 但对有限维单的模李代数和特征零的有限维单李超代数来说, 情况并非如此. 本章的目的是确定具有非退化结合型的单的有限维 Cartan 型模李超代数. 特别地, 我们将证明四类 Cartan 型模李代数均无非退化的迹型.

§1　单李超代数的结合型

在这一节里, 我们将讨论单李超代数的性质, 特别是与结合型有关的性质. 应说明的是, 我们只是选择了一些必要结论, 目的是在本章最后一节决定有限维 Cartan 型李超代数的结合型.

约定基域 $\mathbb{F}$ 的特征不等于 2, 所有的李超代数均是有限维的.

回忆单李超代数的定义: 一个李超代数 L 叫做单的, 如果 L 没有非平凡的 $\mathbb{Z}_2$-阶化理想, 并且 $[L, L] \neq 0$.

根据定义, 单李超代数可能含有非平凡的非 $\mathbb{Z}_2$- 阶化理想. 然而, 事实并非如此! 也就是说, 单李超代数不含任何非平凡的非 $\mathbb{Z}_2$- 阶化的左、右理想 (不管是否为 $\mathbb{Z}_2$-阶化的). 为证明这一结论, 我们给出下面的引理.

引理 1.1　*设 L 是 $\mathbb{F}$ 上单李超代数, τ 是 L 的奇线性变换, 即 $\tau(L_\theta) \subset L_{\theta+\bar{1}}$, $\forall \theta \in \mathbb{Z}_2$. 如果*

$$\tau\big([x, y]\big) = [x, \tau(y)],\ \forall x, y \in L, \tag{1.1}$$

则 $\tau = 0$.

证明　由于 τ 是齐次的, 所以 $\ker\tau$ 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间. 由 (1.1) 式知, $\ker\tau$ 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化左理想, 从而是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化理想. 由 L 的单性, 知 $\tau = 0$ 或 τ 是单射.

假定 τ 是单射, 我们欲推出矛盾. 设 $x, y \in \mathrm{hg}(L)$, 且 $\mathrm{d}(x) = \mathrm{d}(y)$. 由 (1.1) 式, 容易得到

$$[\tau(x), \tau(y)] = -\tau^2\big([y, x]\big). \tag{1.2}$$

注意 τ 是奇的, 并且 $\mathrm{d}(x) = \mathrm{d}(y)$, 容易看出等式 (1.2) 总是一边关于 x, y 是对称的, 另一边是反对称的. 随之, $2\tau^2\big([y, x]\big) = 0$. 因为 $\mathrm{char}\mathbb{F} \neq 2$, τ 是单的, 所以 $[y, x] = 0$. 这便证明了

$$[L_\theta, L_\theta] = 0,\ \forall \theta \in \mathbb{Z}_2. \tag{1.3}$$

由 (1.1) 式及 (1.3) 式, 并注意到 τ 是奇的, 我们有

$$\tau\big([L_\theta, L_{\theta+\bar{1}}]\big) \subset [L_\theta, \tau(L_{\theta+\bar{1}})] \subset [L_\theta, L_\theta] = 0.$$

再次利用 τ 的单性, 得 $[L_\theta, L_{\theta+\bar{1}}] = 0$.

综上, 我们得到 $[L, L] = 0$, 矛盾于 L 的单性. □

注 从上面的证明可以看出, 引理 1.1 对无限维单李超代数仍成立.

现在我们来证明前面提出的有趣结论, 即

命题 1.2 *单李超代数不含任何非平凡的左、右理想(无论是否为 $\mathbb{Z}_2$- 阶化的).*

证明 设 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 是单李超代数. 定义线性变换

$$r : L \to L$$

使得

$$r(x) = (-1)^{\mathrm{d}(x)}x, \ \forall x \in \mathrm{hg}(L).$$

容易验证 r 是李超代数 L 的自同构. 利用 r 可以表示 L 的任意元素 y 的 β- 齐次分量 $y_\beta = \frac{1}{2}\big(y + (-1)^\beta r(y)\big)$. 由此可知下面的事实成立:

$$L\text{的子空间}V\text{是}\mathbb{Z}_2\text{- 阶化的} \iff r(V) \subset V. \tag{1.4}$$

假定 I 是 L 的一个非平凡的左理想 (不要求是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化的, 下文同), 我们欲导出矛盾. 因为 r 是 L 的自同构, 所以有

$$[L, r(I)] = [r(L), r(I)] = r([L, I]) = r(I).$$

这说明 $r(I)$ 亦是 L 的左理想. 由此立知 $I + r(I), I \cap r(I)$ 亦是 L 的左理想. 进而, 利用事实 (1.4) 并注意到 $r^2 = 1$, 可知 $I + r(I), I \cap r(I)$ 是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化左理想, 从而是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化理想. 由 L 的单性, 有

$$I + r(I) = L, \quad I \cap r(I) = 0. \tag{1.5}$$

断言

$$L_\theta = \big\{y + (-1)^\theta r(y) \mid y \in I\big\}, \ \forall \theta \in \mathbb{Z}_2. \tag{1.6}$$

这只需证明包含关系 "$\subset$". 任取 $x \in L_\theta$. 依 (1.5) 式, 存在 $y \in I, \ z \in r(I)$, 使得 $x = y + z$. 注意 $x \in L_\theta$, 有

$$x = \frac{1}{2}\big(y + (-1)^\theta r(y)\big) + \frac{1}{2}\big(z + (-1)^\theta r(z)\big). \tag{1.7}$$

利用 $r^2 = 1$, 可知上式右边的 $\frac{1}{2}\big(z + (-1)^\theta r(z)\big)$ 含于 (1.6) 式的右边. 故由 (1.7) 式立知 (1.6) 式成立.

利用 (1.5) 式, 有子空间直和 $L = I \oplus r(I)$. 因而可以定义线性变换

$$\tau : L \to L$$

使得

$$\tau(y) = y,\ \tau\big(r(y)\big) = -r(y),\ \forall y \in I. \tag{1.8}$$

下面我们验证 τ 满足引理 1.1 的条件. 由 (1.6) 式易见

$$\tau(L_{\overline{0}}) = L_{\overline{1}},\ \tau(L_{\overline{1}}) = L_{\overline{0}},$$

即 τ 是奇的. 另方面, 为验证 (1.1) 式, 任取 $x, y \in L$. 根据 (1.5) 式, 可设 $y = y_1 + y_2$, 其中 $y_1 \in I$, $y_2 \in r(I)$. 注意到 I 和 $r(I)$ 是左理想, 由 τ 的定义有

$$\begin{aligned}\tau\big([x,y]\big) &= \tau\big([x,y_1]+[x,y_2]\big)\\ &= [x,y_1]-[x,y_2]\\ &= [x,y_1-y_2]\\ &= [x,\tau(y)].\end{aligned}$$

这就说明 τ 满足引理 1.1 的条件, 故有 $\tau = 0$. 这矛盾于 $\tau^2 = 1$.

对于右理想的情形, 可作同样处理. □

现在我们讨论李超代数的结合型. 设 L 是 $\mathbb{F}$ 上李超代数, $\lambda : L \times L \to \mathbb{F}$ 是双线性的. 如果

(1) λ 是超对称的, 即

$$\lambda(x,y) = (-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}\lambda(y,x),\ \forall x, y \in \mathrm{hg}(L);$$

(2) λ 是不变的, 即

$$\lambda\big([x,y],z\big) = \lambda\big(x,[y,z]\big),\ \forall x, y \in L,$$

则称 λ 是 L 上的一个结合型.

在单李超代数的情形, 我们将在下面命题中证明, 定义中 (2) 蕴涵 (1).

李超代数 L 上一个双线性型 λ 称为偶的, 如果 $\lambda(L_\theta, L_{\theta+\overline{1}}) = 0$, 对任意 $\theta \in \mathbb{Z}_2$; λ 称为奇的, 如果 $\lambda(L_\theta, L_\theta) = 0$, 对任意 $\theta \in \mathbb{Z}_2$.

命题 1.3 *设 L 是单李超代数, 下面的结论成立.*

1) L 上的不变双线性型均是超对称的.

2) L 上的结合型或者是非退化的, 或者是 0.

3) L 上的结合型或者全是偶的, 或者全是奇的.

4) 若 $\mathbb{F}$ 是代数闭域, 则 L 上的所有结合型互成比例.

证明 1) 设 λ 是 L 上不变双线性型. 对任意 $x, y, z \in \mathrm{hg}(L)$, 有

$$\begin{aligned}\lambda\big(x,[y,z]\big) &= \lambda\big([x,y],z\big)\\ &= -(-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}\lambda\big([y,x],z\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}\lambda\big(y,[x,z]\big)\\&= (-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}(-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(z)}\lambda\big(y,[z,x]\big)\\&= (-1)^{\mathrm{d}(x)(\mathrm{d}(y)+\mathrm{d}(z))}\lambda\big([y,z],x\big).\end{aligned}$$

由 L 的单性, 有 $[L,L]=L$. 故上式说明 λ 是超对称的.

2) 设 λ 是 L 上的一个结合型. 令

$$\mathrm{rad}(L)=\big\{y\in L \mid \lambda(x,y)=0,\ \forall x\in L\big\}.$$

由 λ 的不变性, 易知 $\mathrm{rad}(L)$ 是 L 的左理想 (未必是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化的). 由命题 1.2, 知 $\mathrm{rad}(L)=0$ 或 $\mathrm{rad}(L)=L$; 即, 或者 λ 是非退化的, 或者 $\lambda=0$.

3) 设 λ 是 L 上结合型, 则 $\lambda=\lambda_{\bar 0}+\lambda_{\bar 1}$, 这里

$$\begin{aligned}&\lambda_{\bar 0}\big|_{L_\theta\times L_\theta}=\lambda\big|_{L_\theta\times L_\theta},\ \lambda_{\bar 0}\big|_{L_\theta\times L_{\theta+\bar 1}}=0,\ \forall\theta\in\mathbb{Z}_2;\\&\lambda_{\bar 1}\big|_{L_\theta\times L_\theta}=0,\ \lambda_{\bar 1}\big|_{L_\theta\times L_{\theta+\bar 1}}=\lambda\big|_{L_\theta\times L_{\theta+\bar 1}},\ \forall\theta\in\mathbb{Z}_2.\end{aligned}$$

显然, $\lambda_{\bar 0},\lambda_{\bar 1}$ 仍是 L 上结合型, 且 $\lambda_{\bar 0}$ 是偶的, $\lambda_{\bar 1}$ 是奇的.

若 $\lambda_{\bar 0}=0$, 结论已成立. 假设 $\lambda_{\bar 0}\neq 0$, 由 2) 知 $\lambda_{\bar 0}$ 是非退化的. 所以 $L^*=\{\lambda_{\bar 0}(\ ,y)\mid y\in L\}$. 注意 $\lambda_{\bar 1}(\ ,y)\in L^*$, $y\in L$. 容易验证, 存在惟一一个 L 的线性变换 $\tau: L\to L$, 使得

$$\lambda_{\bar 1}(x,y)=\lambda_{\bar 0}\big(x,\tau(y)\big),\ \forall x,y\in L. \tag{1.9}$$

我们来验证 τ 满足引理 1.1 的条件. 设 $y\in L_\theta$, $\theta\in\mathbb{Z}_2$. 对任意 $x\in L_\theta$, 由 (1.9) 式并注意到 $\lambda_{\bar 1}$ 是奇的, 有

$$\lambda_{\bar 0}\big(x,\tau(y)\big)=\lambda_{\bar 1}(x,y)=0,\ \forall x\in L_\theta.$$

因 $\lambda_{\bar 0}$ 是偶的, 并且非退化, 所以上式蕴涵 $\tau(y)\in L_{\theta+\bar 1}$. 故 $\tau(L_\theta)\subset L_{\theta+\bar 1}$, 即 τ 是奇线性变换.

另方面, 对任意 $x,y,z\in L$, 由 (1.9) 式, 有

$$\begin{aligned}\lambda_{\bar 0}\Big(x,\tau\big([y,z]\big)\Big) &= \lambda_{\bar 1}\big(x,[y,z]\big)\\&= \lambda_{\bar 1}\big([x,y],z\big)\\&= \lambda_{\bar 0}\big([x,y],\tau(z)\big)\\&= \lambda_{\bar 0}\big(x,[y,\tau(z)]\big).\end{aligned}$$

注意到 $\lambda_{\bar 0}$ 是非退化的, 由 x 的任意性可知

$$\tau\big([y,z]\big)=[y,\tau(z)],\ \forall y,z\in L.$$

这就证明了 τ 满足引理 1.1 的条件, 故 $\tau=0$. 由 (1.9) 式, 得 $\lambda_{\bar 1}=0$. 这就完成了 3) 的证明.

4) 设 λ, λ' 是 L 上两个非平凡的结合型. 由 1) 知 λ, λ' 均是非退化的. 仿照 3) 的证明知, 存在惟一的线性变换 $\tau: L \to L$, 使得

$$\lambda(x,y) = \lambda'\big(x, \tau(y)\big), \ \forall x, y \in L. \tag{1.10}$$

设 k 是 τ 的一个特征根 (注意 $\mathbb{F}$ 是代数闭的), z 是相应的特征向量. 由 (1.10) 式, 有

$$\lambda(x,z) = \lambda'(x,kz) = (k\lambda')(x,z), \ \forall x \in L.$$

注意到 $z \neq 0$, 上式说明结合型 $\lambda - k\lambda'$ 是退化的. 由 1), 立知 $\lambda - k\lambda' = 0$, 即 $\lambda = k\lambda'$. □

在特征零的情形, 有限维单李代数均有非退化的结合型, 但对李超代数来说, 情形并非如此. 这是有限维单李超代数分类问题的最主要困难. 在特征 $p(p>0)$ 的情形, 我们知道, 某些单李代数不具有非退化的结合型; 我们将在本章的最后一节证明, 对单李超代数情况也是如此.

命题 1.3 的 4) 说明, 对代数闭域上有限维单李超代数来说, 只需构造出一个非退化结合型就够了 (在存在的情况下). 命题 1.3 的 3) 告诉我们, 考察单李超代数的结合型时, 可将问题简化为只考虑偶或奇的结合型. 然而, 在实际工作中, 往往无需这般.

§2　单 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数的结合型

在本节中, 我们约定 L 是代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的有限维李超代数, $\mathrm{char}\mathbb{F} \neq 2$. 我们将研究单 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数 L 的结合型 (参见 [46], [60]). 关于阶化李代数的结合型的工作, 请参见文献 [1] 与 [13].

我们需要一个有关 $\mathbb{Z}$- 阶化空间的引理.

引理 2.1　*设 V, W 是 $\mathbb{F}$ 上有限维 $\mathbb{Z}$- 阶化空间. 则 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ 具有 $\mathbb{Z}$- 阶化结构*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W) = \bigoplus\nolimits_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)_i, \tag{2.1}$$

其中

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)_i = \big\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W) \mid f(V_j) \subset W_{j+i}, \ \forall j \in \mathbb{Z} \big\}.$$

证明　先证明 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W) \subseteq \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)_i$. 设 pr_i 是 V(或 W) 在 V_i(或 W_i) 上的投影, $i \in \mathbb{Z}$. 注意 V 与 W 是有限维的, 易知 V(或 W) 的恒同映射可以写成有限和 $\mathrm{id} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{pr}_i$. 任取 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$, 则有

$$f = \mathrm{id}_W \circ f \circ \mathrm{id}_V = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \mathrm{pr}_i \circ f \circ \mathrm{pr}_j.$$

对任意 $v \in V_k, \ k \in \mathbb{Z}$, 我们有

$$\mathrm{pr}_i \circ f \circ \mathrm{pr}_j(v) = \delta_{j,k}\mathrm{pr}_i\big(f(v)\big) \in W_{i+(k-j)} = W_{k+(i-j)},$$

所以 $\mathrm{pr}_i \circ f \circ \mathrm{pr}_j \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)_{i-j}$. 故 "$\subseteq$" 成立. 反包关系及 (2.1) 式右边的直和都是显然的. □

推论 2.2 *设 L 是 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数, 则 L^* 有子空间直和分解 $L^* = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}(L^*)_i$, 其中*

$$(L^*)_i = \{\varphi \in L^* \mid \varphi(x) = 0,\ \forall x \in L_j,\ j \neq -i\}.$$

证明 $\mathbb{F}$ 具有平凡的 $\mathbb{Z}$- 阶化: $\mathbb{F}_0 = \mathbb{F}$; $\mathbb{F}_i = 0,\ 0 \neq i \in \mathbb{Z}$. 由命题 2.1, 有

$$\begin{aligned}(L^*)_i &= \{\varphi \in L^* \mid \varphi(L_j) \subset \mathbb{F}_{i+j},\ \forall j \in \mathbb{Z}\}\\ &= \{\varphi \in L^* \mid \varphi(x) = 0,\ \forall x \in L_j,\ j \neq -i\}. \qquad \square\end{aligned}$$

注: 若 V, W 是 L- 模, 则 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ 具有模同构

$$(x \cdot f)(v) := x \cdot f(v) - (-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(f)} f(x \cdot v),$$

其中 $f \in \mathrm{hg}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W))$, $x \in \mathrm{hg}(L)$, $v \in V$. 进一步, 若 V, W 是 L 的 $\mathbb{Z}$- 阶化模 (定义请参见 [46]), 则 (2.1) 式给出 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ 的一个 $\mathbb{Z}$- 阶化模结构. 对推论 2.2, 也有相应的结论. 但在这里, 我们不想在此方面展开讨论.

命题 2.3 *设 $L = \bigoplus_{i=-r}^{s} L_i$ 是有限维单 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数, $\lambda \neq 0$ 是 L 上一个结合型. 那么*

1) $\lambda(L_i, L_j) = 0$, 若 $i + j \neq s - r$.

2) $\lambda : L_i \times L_{s-r-i} \to \mathbb{F}$ 是非退化的, $-r \leq i \leq s$.

证明 1) 由命题 1.3 的 2) 知, λ 是非退化的. 定义映射 $\varphi : L \to L^*$, 使得

$$\varphi(x)(y) = \lambda(x, y),\ \forall x, y \in L.$$

显然 φ 是线性的. 因为 $\ker\varphi = \mathrm{rad}(\lambda) = 0$, 所以 φ 是单射. 根据推论 2.2, L^* 具有 $\mathbb{Z}$-阶化. 再由引理 2.1, φ 可分解为 $\varphi = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \varphi_i$, 其中 $\varphi_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(L, L^*)_i$. 下面我们来证明: $\ker\varphi_j$ 是 L 的右理想 (未必是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化的), $j \in \mathbb{Z}$. 由 φ 的定义及 λ 的不变性, 有

$$\varphi\big([x, y]\big)(z) = \varphi(x)\big([y, z]\big),\ \forall x, y, z \in \mathrm{zhg}(L),$$

这里, $\mathrm{zhg}(L) := \bigcup_{i=-r}^{s} L_i$. 从而,

$$\sum_i \varphi_i\big([x, y]\big)(z) = \sum_i \varphi(x)\big([y, z]\big).$$

随之,

$$\varphi_j\big([x, y]\big)(z) = \varphi_j(x)\big([y, z]\big),\ \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{2.2}$$

因 φ_j 是 $\mathbb{Z}$- 齐次的, 所以 $\ker\varphi_j$ 是 L 的 $\mathbb{Z}$- 阶化子空间. 若 V 是 $\mathbb{Z}$- 阶化空间, 我们用 $\mathrm{zhg}(V)$ 表示 V 中的 $\mathbb{Z}$- 齐次元素的集合. 在 (2.2) 式中令 $x \in \mathrm{zhg}(\ker\varphi_j)$, 则有

$$\varphi_j\big([x, y]\big)(z) = 0,\ \forall x \in \mathrm{zhg}(\ker\varphi_j),\ \forall y, z \in \mathrm{zhg}(L).$$

由此立得

$$\varphi_j\big([x,y]\big)=0,\ \forall x\in \mathrm{zhg}(\ker\varphi_j),\ y\in \mathrm{zhg}(L).$$

进而,

$$\varphi_j\big([x,b]\big)=0,\ \forall x\in \mathrm{zhg}(\ker\varphi_j),\ b\in L. \tag{2.3}$$

任取 $a\in\ker\varphi_j$, 因 $\ker\varphi_j$ 是 L 的 $\mathbb{Z}$- 阶化子空间, 所以有 $a=\sum_i a_i$, 其中 $a_i\in L_i\cap\ker(\varphi_j)$. 再由 (2.3) 式, 可得

$$\varphi_j\big([a,b]\big)=0,\ \forall a\in\ker\varphi_j,\ b\in L.$$

故 $[a,b]\in\ker\varphi_j,\ \forall a\in\ker\varphi_j,\ b\in L$. 从而 $\ker\varphi_j$ 是 L 的右理想 (未必是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化的).

因 φ 是线性空间同构, 所以它必有非零的 $\mathbb{Z}$- 齐次分量. 设 $\varphi_j\neq 0$, 则 $\ker\varphi_j$ 是 L 的真右理想 (未必是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化的). 由命题 1.2, 知 $\ker\varphi_j=0$, 即 φ_j 是单的. 随之, 有 $\varphi_j(L_{-r})\neq 0,\ \varphi_j(L_s)\neq 0$. 因为 $L^*=\bigoplus_{i=-s}^{r}(L^*)_i$, 所以 $-s\le j-r,\ j+s\le r$. 这样, 必有 $j=r-s$. 故 $\varphi=\varphi_{r-s}$.

任取 $x\in L_i,\ i\in\mathbb{Z}$. 则 $\varphi(x)=\varphi_{r-s}(x)\in(L^*)_{i+r-s}$. 注意 $\mathbb{F}$ 的 $\mathbb{Z}$- 阶化是平凡的. 所以, 对任意 $y\in L_j$, 有

$$\lambda(x,y)=\varphi(x)(y)=0,\ 若 i+j\neq s-r.$$

2) 注意 λ 是非退化的, 由 1) 立知 2) 成立. □

我们知道李超代数 L 的偶部分 $L_{\bar 0}$ 是李代数. 设 H 是 $L_{\bar 0}$ 的幂零子代数. 在 L 的伴随表示下, 将 L 视为 H- 模. 由李代数理论, L 关于 H 具有权空间分解. 为了完整, 我们做一简要回顾.

设 H 是 $\mathbb{F}$ 上幂零李代数, $\rho: H\to \mathrm{gl}(V)$ 是 H 的一个有限维表示. 设 $\alpha: H\to\mathbb{F}$ 是一个映射. 置

$$V_\alpha=\Big\{v\in V \;\Big|\; \exists n(h,v)\in\mathbb{N}: \big(\rho(h)-\alpha(h)\mathrm{id}_V\big)^{n(h,v)}(v)=0,\ \forall h\in H\Big\}.$$

若 $V_\alpha\neq 0$, 则称 $\alpha: H\to\mathbb{F}$ 是表示 ρ(或模 V) 的一个权, V_α 称为权 α 的权空间. 我们陈述大家熟知的 Zassenhaus 定理, 它的证明可以从任何一本李代数书中查到 (例如文献 [56]).

引理 2.4 (Zassenhaus) 设 H 是代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的幂零李代数, $\rho: H\to\mathrm{gl}(V)$ 是 H 的一个有限维表示. 那么 V 是其权空间的直和 $V=\bigoplus_{\alpha\in\Delta}V_\alpha$.

命题 2.5 设 L 是 $\mathbb{F}$ 上有限维李超代数, H 是 $L_{\bar 0}$ 的一个幂零(李)子代数. 设 L 关于 H 的权空间分解为 $L=\bigoplus_{\alpha\in\Delta}L_\alpha$. 若 $\lambda: L\times L\to\mathbb{F}$ 是结合型, 则下列结论成立.

1) $\lambda(L_\alpha,L_\beta)=0$, 若 $\alpha+\beta\neq\theta$, 其中 $\alpha,\beta\in\Delta$, θ 是零权.

2) 若 λ 是非退化的, 则 $\lambda: L_\alpha\times L_{-\alpha}\to\mathbb{F}$ 是非退化的, $\forall\alpha\in\Delta$.

证明 1) 首先证明特殊情形 $\lambda(L_\alpha, L_\theta) = 0$, 对任意 $\alpha \neq \theta$. 注意, $\alpha \neq 0$ 确保存在 $h \in H$, 使得 $\alpha(h) \neq 0$. 由 L_α 的定义, 存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $(\mathrm{ad}\, h - \alpha(h)\mathrm{id}_L)^k(L_\alpha) = 0$. 所以 $\mathrm{ad}\, h$ 在 L_α 上的限制是可逆的线性变换. 同样, 由 L_θ 的定义, 存在 $l \in \mathbb{N}$, 使得 $(\mathrm{ad}\, h)^l(L_\theta) = 0$. 现在任取 $x \in L_\alpha$, 由 $\mathrm{ad}\, h\big|_{L_\alpha}$ 的可逆性, 必存在 $y \in L_\alpha$, 使得 $(\mathrm{ad}\, h)^l(y) = x$. 注意 $x \in H \subset L_{\bar{0}}$, 我们有

$$\lambda(x, L_\theta) = \lambda\big((\mathrm{ad}\, h)^l(y), L_\theta\big) = (-1)^l \lambda\big(y, (\mathrm{ad}\, h)^l(L_\theta)\big) = 0.$$

现在考虑一般情形. 不失一般性, 设 $\alpha \neq \theta$. 在上一段, 我们已证明存在 $h \in H$, 使 $\mathrm{ad}\, h\big|_{L_\alpha}$ 是可逆的, 因而必有 $HL_\alpha = L_\alpha$. 利用已证明的特殊情形, 并注意 $H \subset L_\theta$, 有

$$\begin{aligned}\lambda(L_\alpha, L_\beta) &= \lambda\big([H, L_\alpha], L_\beta\big) = \lambda\big(H, [L_\alpha, L_\beta]\big)\\ &\subset \lambda(L_\theta, L_{\alpha+\beta}) = 0,\end{aligned}$$

其中 $\alpha + \beta \neq \theta$.

2) 设 $x \in L_\alpha$, $\lambda(x, L_{-\alpha}) = 0$. 由 1) 知 $\lambda(x, L) = 0$. 因 λ 非退化, 所以 $x = 0$. 这就证明了 $\lambda\big|_{L_\alpha \times L_{-\alpha}}$ 是非退化的. □

综合命题 2.3 与命题 2.5, 我们有下面更加细致的结果.

定理 2.6 设 $L = \bigoplus_{i=-r}^{s} L_i$ 是有限维单 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数, H 是 $L_{\bar{0}} \cap L_0$ 的幂零(李)子代数, L 关于 H 的权空间分解为 $L = \bigoplus_{\alpha\in\Delta} L_\alpha$. 若 $\lambda \neq 0$ 是 L 上的一个结合型, 则下列结论成立.

(1) $\lambda(L_i, L_j) = 0$, 若 $i + j \neq s - r$; $\lambda\big|_{L_k \times L_{s-r-k}}$ 非退化并且 $\dim_{\mathbb{F}} L_k = \dim_{\mathbb{F}} L_{s-r-k}$, 这里 $-r \leq k \leq s$.

(2) $\lambda(L_i \cap L_\alpha, L_j \cap L_\beta) = 0$, 若 $(i + j, \alpha + \beta) \neq (s - r, \theta)$; $\lambda\big|_{L_k \cap L_\gamma \times L_{s-r-k} \cap L_{-\gamma}}$ 非退化并且 $\dim_{\mathbb{F}} L_k \cap L_\gamma = \dim_{\mathbb{F}} L_{s-r-k} \cap L_{-\gamma}$, 其中 $-r \leq i \leq s$, $\gamma \in \Delta$.

证明 (1) 的前两个结论就是命题 2.3. 既然 λ 在 $L_k \times L_{s-r-k}$ 上非退化, 由线性代数的理论知 $\dim_{\mathbb{F}} L_k = \dim_{\mathbb{F}} L_{s-r-k}$.

(2) 这是 (1) 与命题 2.5 的直接结果. □

设 $L = \bigoplus_{i=-r}^{s} L_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数. 置 $L^- = \bigoplus_{i=-r}^{-1} L_i$, $L^+ = \bigoplus_{i=1}^{s} L$. 由 PBW 定理, $U(L) = U(L^-)U(L_0)U(L^+)$. 由 $U(L)$ 的泛性, 存在惟一的表示 $\rho : U(L) \to \mathrm{pl}(L)$, 使得 $\rho(x) = \mathrm{ad}\, x$, 对任意 $x \in L$. 将相应的结合代数 $U(L)$- 模 L 的模作用记做 "·". 显然 $U(L) \cdot L_s = U(L^-) \cdot L_s$ 是 L 的一个左理想.

当我们判定单 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数上的一个超对称双线性型是否为不变的, 下面的命题将起到简化问题的作用.

命题 2.7 设 $L = \bigoplus_{i=-r}^{s} L_i$ 是有限维单 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数. 假设 $\lambda : L \times L \to \mathbb{F}$ 是一个超对称双线性型, 并且满足下列条件:

(a) λ 是 L^-- 不变的, 即

$$\lambda([x,y],z)=\lambda(x,[y,z]),\ \forall x,z\in L,\ y\in L^-;$$

(b) $\lambda\big|_{L_i\times L_s}=0$, 对 $i>-r$;
(c) $\lambda\big|_{L_{-r}\times L_s}$ 是 L_0- 不变的, 即

$$\lambda([x,y],z)=\lambda(x,[y,z]),\ \forall x\in L_{-r},\ y\in L_0,\ z\in L_s.$$

那么 λ 是 L 上的结合型.

证明 置

$$M:=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{y\in \mathrm{hg}(L)\mid \lambda([x,y],z)=\lambda(x,[y,z]),\ \forall x,z\in L\}.$$

显然, M 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间. 下面我们证明 M 是 L 的子代数. 因为 M 是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间, 所以只需验证 M 对其齐次元素的李乘是封闭的. 任取 $a,b\in \mathrm{hg}(M)$, $x,z\in \mathrm{hg}(L)$, 则有

$$\begin{aligned}
&\lambda\Big(\big[x,[a,b]\big],z\Big)\\
&=\lambda\Big(\big[[x,a],b\big]+(-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(a)}\big[a,[x,b]\big],z\Big)\\
&=\lambda\Big(\big[[x,a],b\big],z\Big)+(-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(a)}(-1)(-1)^{\mathrm{d}(a)(\mathrm{d}(x)+\mathrm{d}(b))}\lambda\Big(\big[[x,b],a\big],z\Big)\\
&=\lambda\Big(\big[[x,a],b\big],z\Big)-(-1)^{\mathrm{d}(a)\mathrm{d}(b)}\lambda\Big(\big[[x,b],a\big],z\Big)\\
&=\lambda\Big(x,\big[a,[b,z]\big]\Big)-(-1)^{\mathrm{d}(a)\mathrm{d}(b)}\lambda\Big(x,\big[b,[a,z]\big]\Big)\\
&=\lambda\Big(x,\big[[a,b],z\big]\Big).
\end{aligned}$$

故 $[a,b]\in M$. 这就证明了 M 是 L 的子代数.

由 (a) 知, $L^-\subset M$, 从而 M 是 L^-- 模, 进而是 $U(L^-)$- 模. 下面我们证明 $L_s\subseteq M$. 不失一般性, 只需验证:

$$\lambda([x,y],z)=\lambda(x,[y,z]),\ \forall x\in \mathrm{hg}(L_i),y\in \mathrm{hg}(L_s),z\in \mathrm{hg}(L_j).\tag{2.4}$$

情形 1. $i=0$ 或 $j=0$. 先讨论 $i=0$ 的情况. 若 $j\geq 0$, 由 (b) 知 (2.4) 式的左、右两端均为 0; 若 $j\leq 0$, 则有

$$\begin{aligned}
&\lambda([x,y],z)\\
&=(-1)^{(\mathrm{d}(x)+\mathrm{d}(y))\mathrm{d}(z)}\lambda(z,[x,y])\\
&=(-1)^{(\mathrm{d}(x)+\mathrm{d}(y))\mathrm{d}(z)}\lambda([z,x],y)\quad (\text{利用 (b) 和 (c)})\\
&=(-1)^{(\mathrm{d}(x)+\mathrm{d}(y))\mathrm{d}(z)}(-1)(-1)^{\mathrm{d}(z)\mathrm{d}(x)}\lambda([x,z],y)\\
&=(-1)^{(\mathrm{d}(x)+\mathrm{d}(y))\mathrm{d}(z)}(-1)(-1)^{\mathrm{d}(z)\mathrm{d}(x)}\lambda(x,[z,y])\quad (\text{利用 (a)})
\end{aligned}$$

$$= \lambda\big(x, [y, z]\big),$$

所以 (2.4) 式亦成立.

再讨论 $j = 0$ 的情况. 利用上面讨论的结果, 有

$$\begin{aligned}
&\lambda\big(x, [y, z]\big) \\
&\quad = (-1)^{\mathrm{d}(x)(\mathrm{d}(y)+\mathrm{d}(z))}\lambda\big([y, z], x\big) \\
&\quad = (-1)^{\mathrm{d}(x)(\mathrm{d}(y)+\mathrm{d}(z))}(-1)(-1)^{\mathrm{d}(y)\mathrm{d}(z)}\lambda\big([z, y], x\big) \\
&\quad = (-1)^{\mathrm{d}(x)(\mathrm{d}(y)+\mathrm{d}(z))}(-1)(-1)^{\mathrm{d}(y)\mathrm{d}(z)}\lambda\big(z, [y, x]\big) \\
&\quad = (-1)^{\mathrm{d}(x)(\mathrm{d}(y)+\mathrm{d}(z))} \\
&\qquad (-1)(-1)^{\mathrm{d}(y)\mathrm{d}(z)}(-1)(-1)^{\mathrm{d}(y)\mathrm{d}(x)}(-1)^{\mathrm{d}(z)(\mathrm{d}(x)+\mathrm{d}(y))}\lambda\big([x, y], z\big) \\
&\quad = \lambda\big([x, y], z\big).
\end{aligned}$$

故此时 (2.4) 式成立.

情形 2. $i > 0$, $j > 0$. 此时, $[x, y] = [y, z] = 0$, 所以 (2.4) 式成立.

情形 3. $i > 0$, $j < 0$ 或 $i < 0$, $j > 0$. 我们只验证前一情况, 另一情况可同样验证. 因 $i > 0$, 所以 $[x, y] = 0$, 故 (2.4) 式的左边为 0. 注意 $\mathrm{d}([x, z]) > -r$, 由 (b) 有 $\lambda\big([x, z], y\big) = 0$, 因而 (2.4) 式的右边为

$$\begin{aligned}
\lambda\big(x, [y, z]\big) &= -(-1)^{\mathrm{d}(y)\mathrm{d}(z)}\lambda\big(x, [z, y]\big) \\
&= -(-1)^{\mathrm{d}(y)\mathrm{d}(z)}\lambda\big([x, z], y\big) \quad (\text{利用 (a)}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

故 (2.4) 式成立.

情形 4. $i < 0$, $j < 0$. 利用 (a), 有

$$\begin{aligned}
&\lambda\big([x, y], z\big) \\
&\quad = -(-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}\lambda\big([y, x], z\big) \\
&\quad = -(-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}\lambda\big(y, [x, z]\big) \\
&\quad = -(-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}(-1)(-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(z)}\lambda\big(y, [z, x]\big) \\
&\quad = (-1)^{\mathrm{d}(x)(\mathrm{d}(y)+\mathrm{d}(z))}\lambda\big([y, z], x\big) \\
&\quad = \lambda\big(x, [y, z]\big).
\end{aligned}$$

所以 (2.4) 式成立.

综上, 我们证明了 $L_s \subseteq M$. 因为 L 是单的, 由此命题前面的讨论及命题 1.2 知 $L = U(L^-) \cdot L_s$. 注意到 M 是 $U(L^-)$- 模, 知 $L \subseteq M$. 这便完成了命题的证明. □

§3　Cartan 型模李超代数的非退化结合型

在这一节, 我们将完全确定具有非退化结合型的 Cartan 型模李超代数 (参见 [13], [60]). 仍将 $X(m,n,\underline{t})$ 简记为 X, 这里 $X = \mathrm{W},\mathrm{S},\mathrm{H}$ 或 K, 并且使用记号 $Y_0 = \{1,\cdots,m\}$, $Y_1 = \{m+1,\cdots,m+n\}$, $Y = Y_0 \cup Y_1$. 回忆我们的约定: $m \geq 1, n \geq 2, \mathrm{char}\mathbb{F} = p > 2$. 本节约定基域 $\mathbb{F}$ 是代数闭的.

对于 $i \in Y$, 令 $h_i = x_i\mathrm{D}_i$. 显然 $T := \sum_{i\in Y}\mathbb{F}h_i$ 是 $\mathrm{W}_{\bar{0}}$ 的 Abel 子代数. 所以我们可以考虑 W 关于 T 的权空间分解 $\mathrm{W} = \bigoplus_{\gamma\in\Delta}\mathrm{W}_\gamma$.

下文中我们将使用如下符号: 设 P 是一个命题, 若 P 是真的, 则令 $\delta_P = 1$; 否则令 $\delta_P = 0$.

引理 3.1　设 $\alpha \in \mathrm{A}(m,\underline{t})$, $u \in B(n)$, $i,j \in Y$. 则

$$[h_i, x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j] = (\delta_{i\in Y_0}\alpha_i + \delta_{i\in\{u\}} - \delta_{ij})x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j.$$

证明　当 $i \in Y_0$ 时, 有

$$[h_i, x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j] = (\alpha_i - \delta_{ij})x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j\,;$$

当 $i \in Y_1$ 时, 有

$$[h_i, x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j] = (\delta_{i\in\{u\}} - \delta_{ij})x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j.$$

故引理成立.　□

推论 3.2　*在 W 的标准 $\mathbb{F}$- 基 $\{x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j \mid \alpha \in \mathrm{A}(m,\underline{t}),\ u \in B(n),\ j \in Y\}$ 下, T 中元素(通过伴随表示)对角地作用在 W 上.*

证明　任取 $h \in T$, 设 $h = \sum_{i\in Y}k_ih_i$. 由引理 3.1. 易见每个基向量 $x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j$ 均为 ad$h$ 的特征向量.　□

命题 3.3　*设 W 对 T 的权空间分解为 $\mathrm{W} = \bigoplus_{\gamma\in\Lambda}\mathrm{W}_\gamma$. 则零权 θ 的权空间为*

$$\mathrm{W}_\theta = \sum_{j\in Y_0}\sum_{\substack{\alpha\equiv\varepsilon_j \\ (\mathrm{mod}\ p)}}\mathbb{F}x^{(\alpha)}\mathrm{D}_j + \sum_{j\in Y_1}\sum_{\substack{\alpha\equiv 0 \\ (\mathrm{mod}\ p)}}\mathbb{F}x^{(\alpha)}x_j\mathrm{D}_j, \tag{3.1}$$

这里, 记 $\alpha \equiv \beta \pmod p$ 当且仅当 $\alpha_i \equiv \beta_i \pmod p$, 对任意 $i \in Y_0$.

证明　由 W_θ 的定义, 直接验证可知 (3.1) 式的右边含于左边.

任取 $\sum_{\alpha,u,j}c_{\alpha,u,j}x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j \in \mathrm{W}_\theta$, 其中 $c_{\alpha,u,j} \in \mathbb{F}$. 若某个 $c_{\alpha,u,j} \neq 0$, 由推论 3.2 及 W_θ 的定义, 必有 $x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j \in \mathrm{W}_\theta$. 现在我们只需证明 $x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j$ 含于 (3.1) 的右边即可. 利用引理 3.1 及 W_θ 的定义, 我们有

$$\delta_{i\in Y_0}\alpha_i + \delta_{i\in\{u\}} - \delta_{ij} \equiv 0 \pmod p,\ \forall i \in Y. \tag{3.2}$$

若 $j \in Y_0$, 则对任意 $i \in Y_0$, 由 (3.2) 式有

$$\alpha_i \equiv \delta_{ij} \pmod p,\ \forall i \in Y_0; \tag{3.3}$$

以及

$$\delta_{i\in\{u\}}\equiv\delta_{ij}\equiv 0\pmod p,\ \forall i\in Y_1. \tag{3.4}$$

(3.3) 式蕴涵 $\alpha\equiv\varepsilon_i\pmod p$. (3.4) 式蕴涵 $i\notin\{u\}$, 对任意 $i\in Y_1$; 亦即 $u=\varnothing$. 故在 $j\in Y_0$ 的情形下, $x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j$ 含于 (3.1) 式右边第一个加项中.

现在考虑 $j\in Y_1$ 的情形. 由 (3.2) 式有

$$\alpha_i\equiv\delta_{ij}\equiv 0\pmod p,\ \forall i\in Y_0; \tag{3.5}$$

以及

$$\delta_{i\in\{u\}}\equiv\delta_{ij}\pmod p,\ \forall i\in Y_1. \tag{3.6}$$

(3.5) 式蕴涵 $\alpha\equiv 0\pmod p$. (3.6) 式蕴涵 $u=(j)$. 因此 $x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_j$ 含于 (3.2) 式右边的第二个加项中.

这就完成了命题的证明. □

回忆我们的约定: $m\geq 1, n\geq 2, \mathrm{char}\mathbb{F}=p>2; \xi:=\sum_{i\in Y_0}p^{t_i}-m+n$.

定理 3.4 $\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$ 没有非退化的结合型.

证明 考虑 W 的 $\mathbb{Z}$- 阶化 $\mathrm{W}=\sum_{i=-1}^{\xi-1}\mathrm{W}_i$. 下面证明: $\dim\mathrm{W}_0\cap\mathrm{W}_\theta\neq\dim\mathrm{W}_{\xi-2}\cap\mathrm{W}_\theta$, 这里 θ 是 W 关于 T 的零权. 事实上, 容易知道

$$\begin{aligned}\mathrm{W}_{\xi-2}\ =\ &\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(\pi-\varepsilon_i)}x^E\mathrm{D}_j\mid i\in Y_0, j\in Y\}\\ &\cup\{x^{(\pi)}x^{E-<i>}\mathrm{D}_j\mid i\in Y_1, j\in Y\},\end{aligned}$$

而 $\pi-\varepsilon_i\equiv-\underline{1}-\varepsilon_i\pmod p, i\in Y_0; \pi\equiv-\underline{1}\pmod p$. 与 (3.1) 式比较, 可知

$$\mathrm{W}_{\xi-2}\cap\mathrm{W}_\theta=0.$$

但是, 显然 $x_1\mathrm{D}_1\in\mathrm{W}_0\cap\mathrm{W}_\theta$, 所以 $\dim\mathrm{W}_0\cap\mathrm{W}_\theta\neq\dim\mathrm{W}_{\xi-2}\cap\mathrm{W}_\theta$. 由定理 2.6 的 (2) 知, W 没有非退化的结合型. □

同样地, 我们来证明下面的定理.

定理 3.5 $\mathrm{S}(m,n,\underline{t})$ 没有非退化的结合型.

证明 我们知道 $\mathrm{S}=\sum_{i=-1}^{\xi-2}\mathrm{S}_i$, 其中

$$\mathrm{S}_{\xi-2}=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D}_{ij}(x^{(\pi)}x^E)\mid i,j\in Y\}.$$

直接验证 (注意 $\mathrm{char}\mathbb{F}=p>2$) 可知 $\dim\mathrm{S}_{\xi-2}=\frac{s(s-1)}{2}+n$. 显然 $\dim\mathrm{S}_{-1}=s$. 由 $n\geq 2$, 知 $\dim\mathrm{S}_{\xi-2}\neq\dim\mathrm{S}_{-1}$. 再由定理 2.6 的 (1), 知 S 没有非退化的结合型. □

定义 $c_\xi:\Lambda(m,n,\underline{t})\to\mathbb{F}$, 使得

$$c_\xi\left(\sum_{\alpha,u}c_{\alpha,u}x^{(\alpha)}x^u\right)=c_{\pi,E},$$

其中 $c_{\alpha,u}\in\mathbb{F}$. 显然 c_ξ 是线性的.

定理 3.6 $\mathrm{H}(m,n,\underline{t})$ 具有非退化的结合型

$$\lambda\big(\mathrm{D_H}(a),\mathrm{D_H}(b)\big)=c_\xi(ab), \tag{3.7}$$

其中 $a,b\in\bigoplus_{i=0}^{\xi-1}\Lambda(m,n,\underline{t})_i$.

证明 注意到 $\ker\mathrm{D_H}=\mathbb{F}$, 易知 (3.7) 式定义了函数 $\lambda:\mathrm{H}\times\mathrm{H}\to\mathbb{F}$. 显然 λ 是双线性的. 因为 $\Lambda(m,n,\underline{t})$ 的乘法是超交换的, 所以 λ 是超对称的. 下面证明 λ 的不变性. 我们知道, 对任意 $a,b\in\Lambda(m,n,\underline{t})$, 有

$$[\mathrm{D_H}(a),\mathrm{D_H}(b)]=\mathrm{D_H}\big(\mathrm{D_H}(a)(b)\big)\in\mathrm{H}=\mathrm{D_H}\left(\sum_{i=0}^{\xi-1}\Lambda(m,n,\underline{t})_i\right).$$

由于 $\ker\mathrm{D_H}=\mathbb{F}$, 由上式可知 $\mathrm{D_H}(a)(b)\in\sum_{i=0}^{\xi-1}\Lambda(m,n,\underline{t})$. 故

$$c_\xi\big(\mathrm{D_H}(a)(b)\big)=0,\ \forall a,b\in\Lambda(m,n,\underline{t}). \tag{3.8}$$

任取 $a,b,c\in\sum_{i=0}^{\xi-1}\Lambda(m,n,\underline{t})_i$, 直接计算, 并利用 (3.8) 式, 有

$$\begin{aligned}
&\lambda\big([\mathrm{D_H}(b),\mathrm{D_H}(a)],\mathrm{D_H}(c)\big)+(-1)^{\mathrm{d}(a)\mathrm{d}(b)}\lambda\big(\mathrm{D_H}(a),[\mathrm{D_H}(b),\mathrm{D_H}(c)]\big)\\
&=\lambda\Big(\mathrm{D_H}\big(\mathrm{D_H}(b)(a)\big),\mathrm{D_H}(c)\Big)+(-1)^{\mathrm{d}(a)\mathrm{d}(b)}\lambda\Big(\mathrm{D_H}(a),\mathrm{D_H}\big(\mathrm{D_H}(b)(c)\big)\Big)\\
&=c_\xi\Big(\big(\mathrm{D_H}(b)(a)\big)c\Big)+(-1)^{\mathrm{d}(a)\mathrm{d}(b)}c_\xi\Big(a\big(\mathrm{D_H}(b)(c)\big)\Big)\\
&=c_\xi\Big(\big(\mathrm{D_H}(b)(a)\big)(c)+(-1)^{\mathrm{d}(a)\mathrm{d}(b)}a\big(\mathrm{D_H}(b)(c)\big)\Big)\\
&=c_\xi\big(\mathrm{D_H}(b)(ac)\big)\qquad(\text{注意 }\mathrm{D_H}(b)\text{ 是 }\Lambda(m,n,\underline{t})\text{ 的导子})\\
&=0.
\end{aligned}$$

故 $\lambda\big([\mathrm{D_H}(a),\mathrm{D_H}(b)],\mathrm{D_H}(c)\big)=\lambda\big(\mathrm{D_H}(a),[\mathrm{D_H}(b),\mathrm{D_H}(c)]\big)$, 不变性得证.

显然 λ 是非平凡的, 由命题 1.3 的 (2) 知 λ 是非退化的. □

推论 3.7 当 n 是偶数时, $\mathrm{H}(m,n,\underline{t})$ 上非退化结合型均是偶的; 当 n 是奇数时, $\mathrm{H}(m,n,\underline{t})$ 上非退化结合型均是奇的.

证明 由定理 3.6, (3.7) 式给出了 H 上一个非退化结合型 λ. 由 c_ξ 的定义, 知 λ 是偶 (奇) 的当且仅当 n 是偶 (奇) 的. 再由命题 1.3 的 (3), 便知本推论成立. □

现在我们讨论 $\mathrm{K}(m,n,\underline{t})$ 的结合型. 回忆 (见第一章 §2 节)

$$\mathrm{K}(m,n,\underline{t})=\begin{cases}\Lambda(m,n,\underline{t}) & n-m-3\not\equiv 0\pmod p\\ \bigoplus_{i=0}^{\xi-1}\Lambda(m,n,\underline{t}) & n-m-3\equiv 0\pmod p,\end{cases}$$

其李超代数乘法为 (见第一章 (2.28) 式):

$$[f,g]=\widetilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{K}}(f)(g)-2\mathrm{D}_m(f)g,\ f,g\in\mathrm{K}, \tag{3.9}$$

这里

$$\widetilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{K}}(f) = \sum_{i\in Y\backslash m}(-1)^{\tau(i)\mathrm{d}(f)}\big(x_i\mathrm{D}_m(f)+\sigma(i')\mathrm{D}_{i'}(f)\big)\mathrm{D}_i + \left(2f-\sum_{i\in Y\backslash m}x_i\mathrm{D}_i(f)\right)\mathrm{D}_m,\quad f\in \mathrm{hg}(\mathrm{K}).$$

我们知道, $\mathrm{K}(m,n,\underline{t})$ 具有不可缩 $\mathbb{Z}$- 阶化结构:

$$\mathrm{K}(m,n,\underline{t}) = \bigoplus_{i=-2}^{\mu}\mathrm{K}(m,n,\underline{t})_i,$$

其中

$$\mathrm{K}(m,n,\underline{t})_i = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\big\{x^{(\alpha)}x^u \big|\ |\alpha|+|u|+\alpha_m = i+2\big\}. \tag{3.10}$$

这里, 当 $n-m-3\not\equiv 0 \pmod p$ 时, $\mu=\xi+\pi_m-2$; 当 $n-m-3\equiv 0 \pmod p$ 时, $\mu=\xi+\pi_m-3$.

显然, 由 (3.10) 式可知

$$\mathrm{K}(m,n,\underline{t})_{-2} = \mathbb{F}\cdot 1, \tag{3.11}$$

$$\mathrm{K}(m,n,\underline{t})_{-1} = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x_i \mid i\in Y\backslash m\}, \tag{3.12}$$

$$\mathrm{K}(m,n,\underline{t})_{0} = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x_m, x_ix_j \mid i,j\in Y\backslash m\}. \tag{3.13}$$

当 $n-m-3\not\equiv 0 \pmod p$ 时,

$$\mathrm{K}(m,n,\underline{t})_{\xi+\pi_m-2} = \mathbb{F}\cdot x^{(\pi)}x^E. \tag{3.14}$$

定理 3.8 $\mathrm{K}(m,n,\underline{t})$ 具有非退化的结合型当且仅当 $m-n-5\equiv 0 \pmod p$.

证明 假设 K 具有一个非退化的结合型 λ. 若 $n-m-3\equiv 0 \pmod p$, 由 (3.10) 式易见 $\dim \mathrm{K}_{\xi+\pi_m-3}>1$; 再由 (3.11) 式知

$$\dim \mathrm{K}_{-2}\neq \dim \mathrm{K}_{\xi+\pi_m-3}.$$

由定理 2.6 的 (1), 这矛盾于 K 具有非退化的结合型. 故 $n-m-3\not\equiv 0 \pmod p$. 由 (3.11), (3.14) 式及定理 2.6 的 (1), 知

$$\lambda(1, x^{(\pi)}x^E)\neq 0. \tag{3.15}$$

利用 (3.9) 式计算, 有

$$[x_m, x^{(\pi)}x^E] = (n-m-3)x^{(\pi)}x^E. \tag{3.16}$$

注意到 $[1,x_m]=2$, 我们有

$$\begin{aligned}
&2\lambda(1,x^{(\pi)}x^E)\\
&=\lambda(2,x^{(\pi)}x^E)\\
&=\lambda([1,x_m],x^{(\pi)}x^E)\\
&=\lambda(1,[x_m,x^{(\pi)}x^E])\\
&=\lambda\big(1,(n-m-3)x^{(\pi)}x^E\big)\\
&=(n-m-3)\lambda(1,x^{(\pi)}x^E).
\end{aligned}$$

由 (3.15) 式及上式, 有 $n-m-5\equiv 0 \pmod p$.

反之, 设 $n-m-5\equiv 0 \pmod p$. 既然 $p>2$, 此时有 $m-n-3\not\equiv 0 \pmod p$. 故 $\mathrm{K}=\Lambda(m,n,\underline{t})$. 定义函数

$$\lambda:\mathrm{K}\times\mathrm{K}\to\mathbb{F},\ \lambda(a,b)=c_\xi(ab).$$

显然, λ 是超对称双线性的. 下面验证 λ 满足命题 2.7 的三个条件.

先验证 (c). 注意 $n-m-5\equiv 0 \pmod p$, 并利用 (3.16) 式, 我们有

$$\begin{aligned}
&\lambda\big([1,x_m],x^{(\pi)}x^E\big)-\lambda\big(1,[x_m,x^{(\pi)}x^E]\big)\\
&=\lambda(2,x^{(\pi)}x^E)-\lambda\big(1,(n-m-3)x^{(\pi)}x^E\big)\\
&=-(n-m-5)\lambda(1,x^{(\pi)}x^E)\\
&=0.
\end{aligned}\tag{3.17}$$

对于 $i,j\in Y\backslash m$, 由 $\mathrm{D_K}$ 的定义易见 $\mathrm{D_K}(x_ix_j)\in \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x_k\mathrm{D}_l\mid k\neq l,\ k,l\in Y\}$. 由此可知

$$c_\xi\Big(\mathrm{D_K}(x_ix_j)\big(\Lambda(m,n,\underline{t})\big)\Big)=0,\ i,j\in Y\backslash m.\tag{3.18}$$

所以

$$\lambda\big(1,[x_ix_j,x^{(\pi)}x^E]\big)=c_\xi\big(\mathrm{D_K}(x_ix_j)(x^{(\pi)}x^E)\big)=0.$$

另方面, 显然 $\lambda\big([1,x_ix_j],x^{(\pi)}x^E\big)=\lambda(0,x^{(\pi)}x^E)=0$. 所以, 当然有

$$\lambda\big([1,x_ix_j],x^{(\pi)}x^E\big)=\lambda\big(1,[x_ix_j,x^{(\pi)}x^E]\big),\ i,j\in Y\backslash m.\tag{3.19}$$

综合 (3.17) 与 (3.19) 式知 (c) 成立.

再验证 (a). 注意 (3.12) 式, 对任意 $i\in Y\backslash m,\ b,c\in\Lambda(m,n,\underline{t})$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\lambda\big([x_i,b],c\big)+(-1)^{\mathrm{d}(x_i)\mathrm{d}(b)}\lambda\big(b,[x_i,c]\big)\\
&=\lambda\big(\widetilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{K}}(x_i)(b),c\big)+(-1)^{\mathrm{d}(x_i)\mathrm{d}(b)}\lambda\big(b,\widetilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{K}}(x_i)c\big)\\
&=c_\xi\big(\widetilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{K}}(x_i)(bc)\big)\\
&=0.
\end{aligned}$$

故 λ 是 K_{-1}- 不变的. 同理可验证 λ 也是 K_{-2}- 不变的. 因此, 命题 2.7 中的 (1) 成立.

最后, 由 (3.10) 式及 λ 的定义, 易知 (b) 亦成立. 由命题 2.7, λ 是 K 上一个结合型. 显然, $\lambda \neq 0$. 由 K 的单性, 知 λ 是非退化的. □

推论 3.9 设 $n-m-3 \equiv 5 \pmod p$. 若 n 是偶数, 则 $\mathrm{K}(m,n,\underline{t})$ 的非退化结合型均是偶的; 若 n 是奇数, 则 $\mathrm{K}(m,n,\underline{t})$ 的非退化结合型均是奇的.

证明 仿照推论 3.7 的证明, 易证本推论. □

在本节的最后, 我们将讨论 Cartan 型模李超代数的迹型与 Killing 型. 我们先做一些准备工作, 然后给出有限维单的 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数具有非退化的迹型的必要条件 (参见 [97]). 最后, 得出关于 Cartan 型模李超代数的相应结论.

设 $V=V_{\bar{0}}+V_{\bar{1}}$ 是有限维 $\mathbb{Z}$- 阶化空间, $\mathrm{pl}(V)$ 是 V 上的一般线性李超代数. 令 $\gamma: V\to V$ 是线性变换, 满足

$$\gamma(x)=(-1)^{\theta}x, \quad x\in V_{\theta},\ \theta\in\mathbb{Z}_2.$$

在 $\mathrm{pl}(V)$ 上定义线性函数 $\mathrm{str}:\mathrm{pl}(V)\to\mathbb{F}$, 使得

$$\mathrm{str}(A)=\mathrm{tr}(\gamma A),\ \forall A\in\mathrm{pl}(V),$$

称 str 为*超迹*, 亦称 $\mathrm{str}(A)$ 为 A 的*超迹*.

设 $\dim V_{\bar{0}}=m$, $\dim V_{\bar{1}}$. 设 $v_1,\cdots,v_m$ 是 $V_{\bar{0}}$ 的一个基, $v_{m+1},\cdots,v_{m+n}$ 是 $V_{\bar{1}}$ 的一个基, 我们称 $v_1,\cdots,v_m,v_{m+1},\cdots,v_{m+n}$ 为 V 的一个齐次基. 在此基下, V 的线性变换 $A\in\mathrm{pl}(V)$ 的矩阵可以惟一地写成形式$\left[\begin{smallmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{smallmatrix}\right]$, 这里 A_{11} 是 $m\times m$ 矩阵, A_{22} 是 $n\times n$ 矩阵, A_{12} 是 $m\times n$ 矩阵, A_{21} 是 $n\times m$ 矩阵. 显然 $\mathrm{pl}(V)$ 中偶元素在此基下的矩阵具有形状$\left[\begin{smallmatrix}*&0\\0&*\end{smallmatrix}\right]$, 而奇元素的矩阵具有形状$\left[\begin{smallmatrix}0&*\\ *&0\end{smallmatrix}\right]$. 设$A=\left[\begin{smallmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{smallmatrix}\right]\in\mathrm{pl}(m,n)$, 则

$$\mathrm{str}(A)=\mathrm{tr}(A_{11})-\mathrm{tr}(A_{22}).$$

设 $\rho: L\to\mathrm{pl}(V)$ 是李超代数 L 的一个有限维表示. 定义

$$k_\rho: L\times L\to\mathbb{F}, \quad k_\rho(x,y)=\mathrm{str}\big(\rho(x)\rho(y)\big), \quad \forall x,y\in L.$$

称 k_ρ 为 L 的一个关于表示 ρ 的*迹型*, 简称为 L 的一个*迹型*.

命题 3.10 设 ρ 是李超代数 L 的一个有限维表示, 则迹型 $k_\rho(x,y)=\mathrm{str}\big(\rho(x)\rho(y)\big)$ 是 L 上的偶结合型.

证明 显然 k_ρ 是双线性的. 注意 $\mathrm{pl}(V)_{\bar{1}}$ 中矩阵均具有形状 $A=\left[\begin{smallmatrix}&A_{12}\\A_{21}&\end{smallmatrix}\right]\in\mathrm{pl}(m,n)$, 易知 k_ρ 是偶的. 下面证明 k_ρ 是超对称的. 若 $x,y\in L_{\bar{0}}$, 则 $\rho(x),\rho(y)\in\mathrm{pl}(V)_{\bar{0}}$, 从而 $k_\rho(x,y)=k_\rho(y,x)$. 若 $x\in L_{\bar{0}}, y\in L_{\bar{1}}$, 既然 k_ρ 是偶的, 有 $k_\rho(x,y)=0=k_\rho(y,x)$. 设 $x,y\in L_{\bar{1}}$, 则 $\rho(x),\rho(y)\in\mathrm{pl}(V)_{\bar{1}}$. 因而可设$\rho(x)=\left[\begin{smallmatrix}0&M\\N&0\end{smallmatrix}\right]$, $\rho(y)=\left[\begin{smallmatrix}0&P\\Q&0\end{smallmatrix}\right]$. 显然 $\rho(x)\rho(y)=\left[\begin{smallmatrix}MQ&0\\0&NP\end{smallmatrix}\right]$, $\rho(y)\rho(x)=\left[\begin{smallmatrix}PN&0\\0&QM\end{smallmatrix}\right]$. 随之, $k_\rho(x,y)=\mathrm{tr}(MQ)-$

$\mathrm{tr}(NP)$, $k_\rho(y,x) = \mathrm{tr}(PN) - \mathrm{tr}(QM)$. 故 $k_\rho(x,y) = k_\rho(y,x)$. 综上, 便证明了 k_ρ 是超对称的.

最后我们来证明 k_ρ 的不变性. 对任意 $x,y,z \in \mathrm{hg}(L)$, 容易验证:

$$\begin{aligned}&[\rho(y),\rho(x)\rho(z)]\\&= [\rho(y),\rho(x)]\rho(z) + (-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}\rho(x)[\rho(y),\rho(z)]\\&= \rho([y,z])\rho(z) + (-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}\rho(x)\rho([y,z]).\end{aligned} \tag{3.20}$$

另方面, 由 k_ρ 的超对称性, $\mathrm{str}\big([\rho(y),\rho(x)\rho(z)]\big) = 0$. 故由 (3.20) 式得

$$k_\rho\big([y,x],z\big) + (-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}k_\rho\big(x,[y,z]\big) = \mathrm{str}\big([\rho(y),\rho(x)\rho(z)]\big).$$

故 k_ρ 是不变的. 综上, k_ρ 是 L 上偶结合型. □

设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上向量空间, $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. 定义

$$V_0(f) := \{v \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} : f^k(v) = 0\}.$$

引理 3.11 *设 V 是 $\mathbb{F}$ 上向量空间, $x,y \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. 若存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $(\mathrm{ad}x)^n(y) = 0$, 则 $V_0\big(f(x)\big)$ 在 y 下不变, 其中 f 是 $\mathbb{F}$ 上任意一个多项式.*

证明 见文献 [56] 的引理 1.4.2. □

引理 3.12 *设 $\rho: L \to \mathrm{pl}(V)$ 是李超代数 L 的有限维表示, $x \in L_{\bar{0}}$ 是 L 的 ad- 幂零元, $y \in [L,L] \cap L_{\bar{0}}$, 且满足 $[x,y] = 0$. 则 $\mathrm{str}\big(\rho(x)\rho(y)\big) = 0$.*

证明 注意 $\mathbb{F}$ 是代数闭域. V 关于 $\rho(x)$ 具有权空间分解 $V = \bigoplus_{\alpha\in\Delta} V_\alpha$. 因为 x 是 ad- 幂零的, 由上面的引理知 V_α 是 L- 不变的; 即 $\rho(y)(V_\alpha) \subset V_\alpha$, 对任意 $y \in L, \alpha \in \Delta$. 因为 $[x,y] = 0$ 且 $x,y \in L_{\bar{0}}$, 易知 $\rho(x)$ 与 $\rho(y)$ 是可交换线性变换, 因而可以同时化为上三角形. 注意 $\rho(x)\big|_{V_\alpha}$ 仅有特征根 α, 我们有

$$\mathrm{str}\big(\rho(x)\big|_{V_\alpha} \circ \rho(y)\big|_{V_\alpha}\big) = \alpha\mathrm{str}\big(\rho(y)\big|_{V_\alpha}\big).$$

由 $y \in [L,L]$ 知, $\rho(y) \in [\mathrm{pl}(V),\mathrm{pl}(V)]$. 由迹型的超对称性 (命题 3.10) 知 $\mathrm{str}\big(\rho(y)\big|_{V_\alpha}\big) = 0$. 由 α 的任意性, 有 $\mathrm{str}\big(\rho(x)\rho(y)\big) = 0$. □

命题 3.13 *设 $L = \sum_{i=-r}^{q} L_i$ 是域 $\mathbb{F}$ 上有限维单 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数, 且 $L_0 \cap L_{\bar{0}} \neq 0$. 若 L 具有一个非退化的迹型 k_ρ, 则 $r = q$.*

证明 注意代数闭域必为无限域. 由文献 [56] 的引理 1.4.7, $L_{\bar{0}} \cap L_0$ 具有 Cartan 子代数. 设 H 是 $L_{\bar{0}} \cap L_0$ 的一个 Cartan 子代数. 令

$$\overline{H} = \{x \in L_{\bar{0}} \mid \forall h \in H, \exists n(h) \in \mathbb{N} : (\mathrm{ad}h)^{n(h)}(x) = 0\}. \tag{3.21}$$

由文献 [56] 的定理 3.2.3 知 $\overline{H}$ 是 $L_{\bar{0}}$ 的 $\mathbb{Z}$- 阶化 Cartan 型子代数, 即 $\overline{H} = \sum_{i=-r}^{q} \overline{H} \cap L_i \cap L_{\bar{0}}$, 并且 $\overline{H}_0 = H$. 设 L 关于 H 的权空间分解为 $L = \bigoplus_{\alpha\in\Delta} L_\alpha$. 由定理 2.6 的 (2)

知 $k_\rho : L_i \cap L_\alpha \times L_{q-r-i} \cap L_{-\alpha} \to \mathbb{F}$ 是非退化的. 注意, 由命题 3.10, k_ρ 是偶的. 由此立知

$$k_\rho : L_i \cap L_\alpha \cap L_{\overline{0}} \times L_{q-r-i} \cap L_{-\alpha} \cap L_{\overline{0}} \to \mathbb{F} \tag{3.22}$$

是非退化的. 由线性代数理论, 这蕴涵

$$\dim L_i \cap L_\alpha \cap L_{\overline{0}} = \dim L_{q-r-i} \cap L_{-\alpha} \cap L_{\overline{0}}.$$

因为 H 为 $L_{\overline{0}} \cap L_0$ 的 Cartan 子代数, 所以 $H \neq 0$ 并且 $H = L_\theta \cap L_0 \cap L_{\overline{0}}$.

在上式中取 $i = q - r, \alpha = \theta$(零权), 则有 $\dim L_{q-r} \cap L_\theta \cap L_{\overline{0}} = \dim L_0 \cap L_\theta \cap L_{\overline{0}} \neq 0$. 由 (3.21) 式知 $\overline{H} \supset L_{\overline{0}} \cap L_\theta$, 故有

$$\overline{H}_{q-r} = \overline{H} \cap L_{q-r} \cap L_{\overline{0}} \supset L_{q-r} \cap L_\theta \cap L_{\overline{0}} \neq 0.$$

注意 $\overline{H}_0 = H$, 知 $\overline{H}_{q-r}$ 是 H- 不变的. 因为 $\overline{H}$ 是幂零的, 所以对每个 $y \in H \subset \overline{H}$, $\mathrm{ad}y$ 均是 $\overline{H}_{q-r}$ 的幂零线性变换. 由 Engel 定理, 存在 $0 \neq x \in \overline{H}_{q-r}$, 使得

$$[y, x] = (\mathrm{ad}y)(x) = 0, \quad \forall y \in H.$$

由 L 的单性, 知 $y \in L^{(1)}$. 假设 $q \neq r$. 由 $x \in \overline{H}_{q-r} = \overline{H} \cap L_{q-r} \cap L_{\overline{0}}$, 便知 x 是 ad- 幂零的. 从而由引理 3.12 可知

$$k_\rho(x, y) = 0, \quad y \in H. \tag{3.23}$$

注意 $H = L_{\overline{0}} \cap L_0 \cap L_\theta$. 这样, (3.23) 式蕴涵

$$k_\rho : L_{q-r} \cap L_\theta \cap L_{\overline{0}} \times L_0 \cap L_\theta \cap L_{\overline{0}} \to \mathbb{F}$$

是退化的. 然而, 我们已经知道 (3.22) 是非退化的, 矛盾. 故必有 $q = r$. □

回忆我们的约定: $m \geq 1$, $n \geq 2$, $p \geq 3$.

定理 3.14 Cartan 型模李超代数 $X(m, n, \underline{t})$ *没有非退化的迹型; 特别地,* $X(m, n, \underline{t})$ *没非退化的* Killing *型.*

证明 由定理 3.4 与 3.5 知 W, S 没有非退化迹型; 由命题 3.13, 容易知道 H 和 K 亦没有非退化的迹型. 既然关于伴随表示的迹型就是 Killing 型, 后一个结论当然成立. □

第五章 深度 1 的 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数

我们知道, 深度 1 的 $\mathbb{Z}$- 阶化李代数在李代数的结构与分类中占有重要的地位. 文献 [31] 与 [88] 给出了深度 1 的可迁的 $\mathbb{Z}$- 阶化李代数的嵌入定理. 文献 [31] 完成了底部满足一定条件的深度 1 的有限维 $\mathbb{Z}$- 阶化的模李代数的分类. 文献 [27] 与 [46] 给出了特征零域有限维的具有相容 $\mathbb{Z}$- 阶化的可迁李超代数的嵌入定理. 在本章的 §1 节中, 我们证明了深度 1 的可迁李超代数 G 的嵌入定理, 这里 G 的 $\mathbb{Z}$- 阶化与 $\mathbb{Z}_2$- 阶化可以是不相容的, G 的基域的特征数仅要求不为 2. 实际上, 当基域的特征数为 2 时, 李超代数就是李代数. 在本章的 §2 节中, 我们利用嵌入定理, 分别确定出底部的零次成分为一般线性李超代数与特殊线性李超代数的深度 1 的可迁的 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数.

§1 嵌 入 定 理

我们称 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数 $G = \bigoplus_{i\geq -1} G_i$ 为深度 1 的 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数, 并且称 $G_{-1}\oplus G_0$ 为 G 的底部. 若对任意 $i\in\mathbb{N}_0$, 总有

$$\{x\in G_i \mid [x, G_{-1}] = 0\} = 0,$$

则称 G 是可迁的. 由第一章命题 1.15 知, 若 G 是深度 1 的 $\mathbb{Z}$- 阶化的单李超代数, 则 G 是可迁的. 本节将证明深度 1 的可迁的 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数可嵌入到 $\mathrm{W}(m,n)$ 中.

设 $\mathbb{F}$ 是特征数不为 2 的域. 令 $G = G_{\bar{0}}\oplus G_{\bar{1}} = \bigoplus_{i\geq -1} G_i$ 是 $\mathbb{F}$ 上深度 1 的 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数. 设 $V_0 = G_{-1}\cap G_{\bar{0}}$, $V_1 = G_{-1}\cap G_{\bar{1}}$. 令 $\mathrm{T}(G_{-1}) = \bigoplus_{r\geq 0}\mathrm{T}^r(G_{-1})$ 是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化空间 G_{-1} 上的张量代数, 这里 $\mathrm{T}^r(G_{-1}) = G_{-1}\otimes G_{-1}\otimes\cdots\otimes G_{-1}$ 是 r 个 G_{-1} 的张量积. G_{-1} 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化诱导了 $\mathrm{T}(G_{-1})$ 的一个 $\mathbb{Z}_2$- 阶化, 从而 $\mathrm{T}(G_{-1})$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化超代数. 令 J 是所有形如

$$x\otimes y - (-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)} y\otimes x,\ x, y\in G_{-1},$$

的元素生成的 $\mathrm{T}(G_{-1})$ 的理想. 置 $\Omega = \mathrm{T}(G_{-1})/J$. 则有超李代数的同构: $\Omega\cong \mathrm{S}(V_0)\otimes\Lambda(V_1)$, 其中 $\mathrm{S}(V_0)$ 是空间 V_0 的对称代数, $\Lambda(V_1)$ 是空间 V_1 的外代数. 我们称 Ω 为超对称代数. 设 $x_1,\cdots,x_m$ 是空间 V_0 的基底, $\xi_{m+1},\cdots,\xi_{m+n}$ 是 V_1 的基底. 则 $\mathrm{S}(V_0)$ 同构于 m 个未定元 $x_1,\cdots,x_m$ 的多项式代数 $\mathbb{F}[x_1,\cdots,x_m]$. 于是

$$\Omega\cong\mathbb{F}[x_1,\cdots,x_m]\otimes\Lambda(V_1).$$

我们简记 $\mathbb{N}_0^m$ 为 $A(m)$. 设 $\alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\in A(m)$, 记 $\mathbb{F}[x_1,\cdots,x_m]$ 中的单项式 $x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}$ 为 x^α. 设 $s = m+n$. 按第一章 §2 的方式, 将 $\Lambda(V_1)$ 中的元素 $\xi_{u_1}\xi_{u_2}\cdots\xi_{u_k}$ 记为 ξ^u, 其中 $u = \langle u_1, u_2,\cdots,u_k\rangle\in B(n)$, 并且简记 Ω 中的元素 $f\otimes\xi$ 为 $f\xi$, 其

中 $f \in \mathbb{F}[x_1, \cdots, x_m]$, $\xi \in \Lambda(V_1)$. 显然 $\{x^\alpha \xi^u \mid \alpha \in A(m),\ u \in B(n)\}$ 构成了 Ω 的一个 $\mathbb{F}$-基底.

$\mathrm{T}(G_{-1})$ 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化与 $\mathbb{Z}$- 阶化分别诱导了 Ω 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化与 $\mathbb{Z}$- 阶化, 使得 $\Omega = \bigoplus_{i\geq 0}\Omega_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化超代数, 其中 $\Omega_i = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^\alpha\xi^u \mid |\alpha| + |u| = i\}$. 显然 $G_{-1} = \Omega_1$.

设 $r > 0$. 令 $\mathrm{K}_r(G_{-1})$ 为 r 个 G_{-1} 的积 $G_{-1} \times \cdots \times G_{-1}$. 约定 $\mathrm{K}_0(G_{-1}) = \mathbb{F}1$. 令 $\mathrm{K}(G_{-1}) = \bigoplus_{r\geq 0}\mathrm{K}_r(G_{-1})$. 设 $y \in G$, 定义空间 $\mathrm{K}(G_{-1})$ 到 G 的线性映射 ϕ_y, 使得

$$\phi_y(z_1, \cdots, z_r) := (\operatorname{ad} z_1)\cdots(\operatorname{ad} z_r)(y),$$

其中 $(z_1, \cdots, z_r) \in \mathrm{K}_r(G_{-1})$. 因 ϕ_y 在每个 $\mathrm{K}_r(G_{-1})$ 上均为 r- 重线性映射, 其中 $r \geq 0$, 故 ϕ_y 诱导了 $\mathrm{T}(G_{-1})$ 到 G 的线性映射 ψ_y, 使得

$$\psi_y(z_1 \otimes \cdots \otimes z_r) = (\operatorname{ad} z_1)\cdots(\operatorname{ad} z_r)(y).$$

对 r 用归纳法易证 $\psi_y(J \cap \mathrm{T}^r(G_{-1})) = 0$, $r \geq 0$. 故 ψ_y 诱导了 Ω 到 G 的线性映射 $\mu(y)$, 使得

$$\mu(y)(x^\alpha\xi^u) = (\operatorname{ad} x_1)^{\alpha_1}\cdots(\operatorname{ad} x_m)^{\alpha_m}(\operatorname{ad}\xi_{u_1})\cdots(\operatorname{ad}\xi_{u_k})(y), \tag{1.1}$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in A(m)$, $u = \langle u_1, \cdots, u_k\rangle \in B(n)$. 我们约定 $\mu(y)(1) = y$.

设 $u, v \in B(n)$. 若 $\{v\} \cap \{u\} = \varnothing$, 由第三章定义 1.5 知 $\xi^v\xi^u = \mathrm{sgn}(v, u)\xi^{v+u}$. 若 $t \in Y_1 := \{m+1, \cdots, s\}$, 则令

$$I(t) = \{v \in B(n) \mid \min\{v\} = t\} = \{v \in B(n) \mid v_1 = t\}.$$

若 $u \in B(n)$, 则令 $T(u) = \{v \in B(n) \mid v \leq u\}$, 这里 $v \leq u$ 仍定义为 $\{v\} \subseteq \{u\}$.

引理 1.1 设 $u = \langle u_1, \cdots, u_k\rangle \in B(n)$, $v \in T(u) \cap I(u_1)$. 则

$$\mathrm{sgn}(v - \langle u_1\rangle, u - v) = \mathrm{sgn}(v, u - v), \tag{1.2}$$

若 $v \in T(u - \langle u_1\rangle)$, 则

$$(-1)^{|v|}\mathrm{sgn}(v, u - \langle u_1\rangle - v) = \mathrm{sgn}(v, u - v), \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}&(-1)^{|u-\langle u_1\rangle - v| + |v| + 1}\mathrm{sgn}(v, u - \langle u_1\rangle - v)\\ &= (-1)^{|u-v|}\mathrm{sgn}(v, u - v).\end{aligned} \tag{1.4}$$

证明 我们仅证 (1.4) 式. 因为 $v \in T(u - \langle u_1\rangle)$, 故可设 $v = \langle u_{i_1}, \cdots, u_{i_r}\rangle$, 其中 $i_1, \cdots, i_r \in \{2, \cdots, k\}$. 设 $u - \langle u_1\rangle - v = \langle u_{t_1}, \cdots, u_{t_j}\rangle$, 其中 $j = k - 1 - r$. 则 $u - v = \langle u_1, u_{t_1}, \cdots, u_{t_j}\rangle$.

因为 $|u - \langle u_1\rangle - v| + |v| + 1 = k$, 所以

$$\begin{aligned}&(-1)^{|u-\langle u_1\rangle - v| + |v| + 1}\mathrm{sgn}(v, u - \langle u_1\rangle - v)\\ &= (-1)^k\mathrm{sgn}(\langle u_{i_1}, \cdots, u_{i_r}\rangle, \langle u_{t_1}, \cdots, u_{t_j}\rangle)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^k \mathrm{sgn}(\langle u_1, u_{i_1}, \cdots, u_{i_r}\rangle, \langle u_{t_1}, \cdots, u_{t_j}\rangle) \\
&= (-1)^{k+r} \mathrm{sgn}(\langle u_{i_1}, \cdots, u_{i_r}\rangle, \langle u_1, u_{t_1}, \cdots, u_{t_j}\rangle) \\
&= (-1)^{k-r} \mathrm{sgn}(v, u-v) \\
&= (-1)^{|u-v|} \mathrm{sgn}(v, u-v). \qquad \square
\end{aligned}
$$

若 $q=0$ 或 1, $v \in T(u-\langle u_1\rangle) = T(u)\backslash I(u_1)$. 由 (1.3) 与 (1.4) 知

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{q|u-<u_1>-v|+|v|+q} \mathrm{sgn}(v, u-\langle u_1\rangle - v) \\
&= (-1)^{q|u-v|} \mathrm{sgn}(v, u-v).
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

若 $\alpha \in A(m)$, 则令 $R(\alpha) = \{\beta \in A(m) \mid \beta \le \alpha\}$.

引理 1.2 设 $y, y' \in G$, $\mathrm{d}(y) = \overline{q}$, 其中 $q \in \{0,1\}$. 对任意 $\alpha \in A(m)$, $u \in B(n)$, 有

$$
\begin{aligned}
\mu([y,y'])(x^\alpha \xi^u) = &\sum_{\beta \in R(\alpha), v \in T(u)} (-1)^{q|u-v|} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\
&\cdot \mathrm{sgn}(v, u-v)\big[\mu(y)(x^\beta \xi^v), \mu(y')(x^{\alpha-\beta}\xi^{u-v})\big].
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

证明 对 $|\alpha|$ 用归纳法证明 (1.6) 式. 当 $|\alpha| = 0$ 时, 需证等式

$$
\begin{aligned}
\mu([y,y'])(\xi^u) = &\sum_{v \in T(u)} (-1)^{q|u-v|} \\
&\cdot \mathrm{sgn}(v, u-v)\big[\mu(y)(\xi^v), \mu(y')(\xi^{u-v})\big].
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

我们对 $|u|$ 用归纳法证明 (1.7) 式. 由 $\mu(y)$ 的定义知,

$$
\mu([y,y'])(1) = [y,y'] = [\mu(y)(1), \mu(y')(1)].
$$

所以当 $|u| = 0$ 时,(1.7) 式成立. 设 $|u| = k+1$, 则可设 $u = \langle u_1, \cdots, u_{k+1}\rangle$. 由归纳假设 (注意到 $\mathrm{d}(\mu(y)) = \mathrm{d}(y)$), 有

$$
\begin{aligned}
&\mu([y,y'])(\xi^u) \\
=&\big[\xi_{u_1}, \mu([y,y'])(\xi^{u-\langle u_1\rangle})\big] \\
=&\Bigg[\xi_{u_1}, \sum_{v \in T(u-\langle u_1\rangle)} (-1)^{q|u-\langle u_1\rangle - v|} \mathrm{sgn}(v, u-\langle u_1\rangle - v) \\
&\cdot \big[\mu(y)(\xi^v), \mu(y')(\xi^{u-\langle u_1\rangle - v})\big]\Bigg] \\
=&\sum_{v \in T(u-\langle u_1\rangle)} (-1)^{q|u-\langle u_1\rangle - v|} \mathrm{sgn}(v, u-\langle u_1\rangle - v) \\
&\cdot \Big[\xi_{u_1}, \big[\mu(y)(\xi^v), \mu(y')(\xi^{u-\langle u_1\rangle - v})\big]\Big]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{v\in T(u-\langle u_1\rangle)} (-1)^{q|u-\langle u_1\rangle - v|}\mathrm{sgn}(v, u-\langle u_1\rangle - v)\\
&\quad\cdot\left[\mu(y)(\xi^{v+\langle u_1\rangle}), \mu(y')(\xi^{u-\langle u_1\rangle - v})\right]\\
&\quad + \sum_{v\in T(u-\langle u_1\rangle)} (-1)^{q|u-\langle u_1\rangle - v|+|v|+q}\mathrm{sgn}(v, u-\langle u_1\rangle - v)\\
&\quad\cdot\left[\mu(y)(\xi^{v}), \mu(y')(\xi^{u-v})\right]\\
&= \sum_{v\in T(u)\cap I(u_1)} (-1)^{q|u-v|}\mathrm{sgn}(v-\langle u_1\rangle, u-v)\\
&\quad\cdot\left[\mu(y)(\xi^{v}), \mu(y')(\xi^{u-v})\right]\\
&\quad + \sum_{v\in T(u)\setminus I(u_1)} (-1)^{q|u-\langle u_1\rangle - v|+|v|+q}\mathrm{sgn}(v, u-\langle u_1\rangle - v)\\
&\quad\cdot\left[\mu(y)(\xi^{v}), \mu(y')(\xi^{u-v})\right].
\end{aligned}$$

将 (1.2) 与 (1.5) 式代入上式, 即可得到 (1.7) 式.

假设当 $|\alpha| = k$ 时,(1.6) 式成立. 令 $|\alpha| = k+1$. 设

$$j = \min\{i \mid \alpha_i \neq 0\},\ A(m)_j = \{\beta \in A(m) \mid \beta_j \neq 0\}.$$

由归纳假设知

$$\begin{aligned}
&\mu[y, y'](x^\alpha \xi^u)\\
=&\left[x_j, \mu[y, y'](x^{\alpha-\varepsilon_j}\xi^u)\right]\\
=&\left[x_j, \sum_{\beta\in R(\alpha-\varepsilon_j), v\in T(u)} (-1)^{q|u-v|}\binom{\alpha-\varepsilon_j}{\beta}\mathrm{sgn}(v, u-v)\right.\\
&\left.\cdot\left[\mu(y)(x^\beta x^v), \mu(y')(x^{\alpha-\varepsilon_j-\beta}\xi^{u-v})\right]\right]\\
=&\sum_{\beta\in R(\alpha-\varepsilon_j), v\in T(u)} (-1)^{q|u-v|}\binom{\alpha-\varepsilon_j}{\beta}\mathrm{sgn}(v, u-v)\\
&\cdot\left[x_j, \left[\mu(y)(x^\beta x^v), \mu(y')x^{\alpha-\varepsilon_j-\beta}\xi^{u-v}\right]\right]\\
=&\sum_{\beta\in R(\alpha-\varepsilon_j), v\in T(u)} (-1)^{q|u-v|}\binom{\alpha-\varepsilon_j}{\beta}\mathrm{sgn}(v, u-v)\\
&\cdot\left[\mu(y)(x^{\beta+\varepsilon_j}\xi^v), \mu(y')(x^{\alpha-\varepsilon_j-\beta}\xi^{u-v})\right]\\
&+\sum_{\beta\in R(\alpha-\varepsilon_j), v\in T(u)} (-1)^{q|u-v|}\binom{\alpha-\varepsilon_j}{\beta}\mathrm{sgn}(v, u-v)\\
&\cdot\left[\mu(y)(x^\beta\xi^v), \mu(y')(x^{\alpha-\beta}\xi^{u-v})\right]\\
=&\sum_{\beta\in R(\alpha)\cap A(m)_j, v\in T(u)} (-1)^{q|u-v|}\binom{\alpha-\varepsilon_j}{\beta-\varepsilon_j}\mathrm{sgn}(v, u-v)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot \big[\mu(y)(x^{\beta}\xi^{v}), \mu(y')(x^{\alpha-\beta}\xi^{u-v})\big] \\
&+ \sum_{\beta\in R(\alpha-\varepsilon_j), v\in T(u)} (-1)^{q|u-v|}\binom{\alpha-\varepsilon_j}{\beta}\operatorname{sgn}(v, u-v) \\
&\cdot \big[\mu(y)(x^{\beta}\xi^{v}), \mu(y')(x^{\alpha-\beta}\xi^{u-v})\big] \\
= &\sum_{\beta\in R(\alpha)\setminus R(\alpha-\varepsilon_j), v\in T(u)} (-1)^{q|u-v|}\binom{\alpha-\varepsilon_j}{\beta-\varepsilon_j}\operatorname{sgn}(v, u-v) \\
&\cdot \big[\mu(y)(x^{\beta}\xi^{v}), \mu(y')(x^{\alpha-\beta}\xi^{u-v})\big] \\
&+ \sum_{\beta\in R(\alpha-\varepsilon_j)\cap A(m)_j, v\in T(u)} (-1)^{q|u-v|}\left[\binom{\alpha-\varepsilon_j}{\beta-\varepsilon_j}+\binom{\alpha-\varepsilon_j}{\beta}\right] \\
&\cdot \operatorname{sgn}(v, u-v)\big[\mu(y)(x^{\beta}\xi^{v}), \mu(y')(x^{\alpha-\beta}\xi^{u-v})\big] \\
&+ \sum_{\beta\in R(\alpha-\varepsilon_j)\setminus A(m)_j, v\in T(u)} (-1)^{q|u-v|}\binom{\alpha-\varepsilon_j}{\beta}\operatorname{sgn}(v, u-v) \\
&\cdot \big[\mu(y)(x^{\beta}\xi^{v}), \mu(y')(x^{\alpha-\beta}\xi^{u-v})\big].
\end{aligned}
$$

易见, 若 $\beta\in R(\alpha)\setminus R(\alpha-\varepsilon_j)$, 则 $\binom{\alpha-\varepsilon_j}{\beta-\varepsilon_j}=\binom{\alpha}{\beta}$; 若 $\beta\in R(\alpha-\varepsilon_j)\cap A(m)_j$, 则 $\binom{\alpha-\varepsilon_j}{\beta-\varepsilon_j}+\binom{\alpha-\varepsilon_j}{\beta}=\binom{\alpha}{\beta}$; 若 $\beta\in R(\alpha-\varepsilon_j)\setminus A(m)_j$, 则 $\binom{\alpha-\varepsilon_j}{\beta}=\binom{\alpha}{\beta}$. 于是上式的右端与 (1.6) 式的右端相同, 引理得证. □

设 $y\in G_r$, $y'\in G$, $x^{\beta}\xi^{v}\in\Omega_{r+1}$, $x^{\alpha}\xi^{u}\in\Omega$, 则有 $\mu(y)(x^{\beta}\xi^{v})\in G_{-1}$. 故可设 $\mu(y)(x^{\beta}\xi^{v})=\sum_{i=1}^{m}a_ix_i+\sum_{i=m+1}^{s}b_i\xi_i$, 其中 $a_i, b_i\in\mathbb{F}$. 由 (1.1) 式知

$$
\begin{aligned}
&\big[\mu(y)(x^{\beta}\xi^{v}), \mu(y')(x^{\alpha}\xi^{u})\big] \\
&= \operatorname{ad}\big(\mu(y)(x^{\beta}\xi^{v})\big)\big(\mu(y')(x^{\alpha}\xi^{u})\big) \\
&= \operatorname{ad}\left(\sum_{i=1}^{m}a_ix_i+\sum_{i=m+1}^{s}b_i\xi_i\right)\big(\mu(y')(x^{\alpha}\xi^{u})\big) \\
&= \mu(y')\left(\left(\sum_{i=1}^{m}a_ix_i+\sum_{i=m+1}^{s}b_i\xi_i\right)x^{\alpha}\xi^{u}\right) \\
&= \mu(y')\Big(\mu(y)(x^{\beta}\xi^{v})x^{\alpha}\xi^{u}\Big).
\end{aligned}\tag{1.8}
$$

设 $r\geq -1$, 则 μ 诱导了线性映射 $\mu_r: G_r\to \operatorname{Hom}(\Omega_{r+1}, G_{-1})$, 使得 $\mu_r(y)=\mu(y)$, $\forall y\in G_r$.

引理 1.3 若 $G=\bigoplus_{r\geq -1}G_r$ 是可迁的 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数, 则 μ_r 是单射, $\forall r\geq -1$.

证明 因为 μ_r 是线性映射, 所以只需证明 $\ker(\mu_r)=0$. 对 r 用归纳法. 当 $r=-1$ 时, 任取 $y\in\ker(\mu_{-1})$, 则 $\mu_{-1}(y)=0$. 于是 $y=\mu_{-1}(y)(1)=0$, 因此 $\ker(\mu_{-1})=0$.

假设 $\ker(\mu_{r-1})=0$. 令 $y\in\ker(\mu_r)$, 则 $y\in G_r$ 并且 $\mu_r(y)=0$. 故 $[x_j, y]\in G_{r-1}$, $\forall j\in$

Y_0. 任取 $x^\alpha\xi^u \in \Omega_r$, 其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$, $u=\langle u_1,\cdots,u_k\rangle$. 则

$$\begin{aligned}&\mu_{r-1}\big([x_j,y]\big)(x^\alpha\xi^u)\\&=\left(\prod_{i=1}^{m}(\operatorname{ad}x_i)^{\alpha_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{k}\operatorname{ad}\xi_{u_i}\right)\big([x_j,y]\big)\\&=\mu_r(y)(x^{\alpha+\varepsilon_j}\xi^u)\\&=0,\end{aligned}$$

所以 $[x_j,y]\in\ker(\mu_{r-1})$. 由归纳假设 $[x_j,y]=0$, $\forall j\in Y_0$. 同理 $[\xi_j,y]=0$, $\forall j\in Y_1$, 从而 $[G_{-1},y]=0$. 因为 G 是可迁的, 所以 $y=0$. 故 $\ker(\mu_r)=0$, 于是 μ_r 是单射. □

对于 $\alpha\in A(m)$, $u\in B(n)$, $r\in\mathbb{N}_0$, 令

$$M(\alpha,u,r)=\big\{(\beta,v)\;\big|\;\beta\in R(\alpha),\ v\in T(u),\ |\beta|+|v|=r\big\}$$

引理 1.4 设 $y\in G_r$, $y'\in G_s$, 并且 $\mathrm{d}(y)=\overline{q}$, $\mathrm{d}(y')=\overline{t}$, 其中 $q,t\in\{0,1\}$. 令 $x^\alpha\xi^u\in\Omega_{r+s+1}$, 则

$$\begin{aligned}&\mu_{r+s}\big([y,y']\big)(x^\alpha\xi^u)\\&=\sum_{(\beta,v)\in M(\alpha,u,r+1)}(-1)^{q|u-v|}\binom{\alpha}{\beta}\operatorname{sgn}(v,u-v)\mu(y')\\&\quad\cdot\Big(\big(\mu(y)(x^\beta\xi^v)\big)x^{\alpha-\beta}\xi^{u-v}\Big)\\&\quad-\sum_{(\beta,v)\in M(\alpha,u,s+1)}(-1)^{qt+t|u-v|}\binom{\alpha}{\beta}\operatorname{sgn}(v,u-v)\mu(y)\\&\quad\cdot\Big(\big(\mu(y')(x^\beta\xi^v)\big)x^{\alpha-\beta}\xi^{u-v}\Big).\end{aligned}\tag{1.9}$$

证明 若 $|\beta|+|v|>r+1$, 则 $\mu(y)(x^\beta\xi^v)=0$. 若 $|\beta|+|v|<r$, 则 $\mu(y')(x^{\alpha-\beta}\xi^{u-v})=0$, 其中 $\beta\le\alpha$, $v\le u$. 由引理 1.2 与 (1.8) 式知

$$\begin{aligned}&\mu_{r+s}\big([y,y']\big)(x^\alpha\xi^u)=\mu\big([y,y']\big)(x^\alpha\xi^u)\\&=\sum_{(\beta,v)\in M(\alpha,u,r+1)}(-1)^{q|u-v|}\binom{\alpha}{\beta}\operatorname{sgn}(v,u-v)\mu(y')\\&\quad\cdot\Big(\big(\mu(y)(x^\beta\xi^v)\big)x^{\alpha-\beta}\xi^{u-v}\Big)\\&\quad+\sum_{(\beta,v)\in M(\alpha,u,r)}(-1)^{q|u-v|}\binom{\alpha}{\beta}\operatorname{sgn}(v,u-v)\\&\quad\cdot\big[\mu(y)(x^\beta\xi^v),\mu(y')(x^{\alpha-\beta}\xi^{u-v})\big].\end{aligned}\tag{1.10}$$

考察 (1.10) 的右端第二个加项, 则有

$$\sum_{(\beta,v)\in M(\alpha,u,r)}(-1)^{q|u-v|}\binom{\alpha}{\beta}\operatorname{sgn}(v,u-v)$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot \left[\mu(y)(x^{\beta}\xi^{v}), \mu(y')(x^{\alpha-\beta}\xi^{u-v})\right] \\
= -&\sum_{(\beta,v)\in M(\alpha,u,r)} (-1)^{q|u-v|+(q+|v|)(t+|u+v|)}\binom{\alpha}{\beta}\mathrm{sgn}(v,u-v) \\
&\cdot \left[\mu(y')(x^{(\alpha-\beta)}\xi^{u-v}), \mu(y)(x^{\beta}\xi^{v})\right] \\
= -&\sum_{(\beta,v)\in M(\alpha,u,r)} (-1)^{qt+t|v|+|v||u-v|}\binom{\alpha}{\beta}\mathrm{sgn}(v,u-v)\mu(y) \\
&\cdot \Big(\big(\mu(y')(x^{\alpha-\beta}\xi^{u-v})\big)x^{\beta}\xi^{v}\Big) \\
= -&\sum_{(\beta,v)\in M(\alpha,u,s+1)} (-1)^{qt+t|u-v|+|u-v||v|}\binom{\alpha}{\beta}\mathrm{sgn}(u-v,v)\mu(y) \\
&\cdot \Big(\big(\mu(y')(x^{\beta}\xi^{v})\big)x^{\alpha-\beta}\xi^{u-v}\Big) \\
= -&\sum_{(\beta,v)\in M(\alpha,u,s+1)} (-1)^{qt+t|u-v|}\binom{\alpha}{\beta}\mathrm{sgn}(v,u-v)\mu(y) \\
&\cdot \Big(\big(\mu(y')(x^{\beta}\xi^{v})\big)x^{\alpha-\beta}\xi^{u-v}\Big).
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

将 (1.11) 式代入 (1.10) 式, 即得到 (1.9) 式. 引理得证. □

令 $\mathrm{Hom}_f(\Omega, G_{-1}) = \bigoplus_{r\geq 0}\mathrm{Hom}(\Omega_r, G_{-1})$, 这里 $\bigoplus_{r\geq 0}\mathrm{Hom}(\Omega_r, G_{-1})$ 的每个元素都是取自有限多个 $\mathrm{Hom}(\Omega_r, G_{-1})$ 的元素之和. 则 $\mathrm{Hom}_f(\Omega, G_{-1})$ 是 $\mathrm{Hom}(\Omega, G_{-1})$ 的一个无限维 $\mathbb{Z}$- 阶化子空间, 并且 Ω 与 G_{-1} 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化诱导了空间 $\mathrm{Hom}_f(\Omega, G_{-1})$ 的一个 $\mathbb{Z}_2$- 阶化. 令 $\sigma \in \mathrm{Hom}(\Omega_{r+1}, G_{-1})$, $\tau \in \mathrm{Hom}(\Omega_{s+1}, G_{-1})$, 并且 $\mathrm{d}(\sigma) = \overline{q}$, $\mathrm{d}(\tau) = \overline{t}$, $q, t \in \{0, 1\}$. 定义 $[\sigma, \tau] \in \mathrm{Hom}(\Omega_{r+s+1}, G_{-1})$, 使得对任意 $x^{\alpha}\xi^{u} \in \Omega_{r+s+1}$, 有

$$
\begin{aligned}
&[\sigma,\tau](x^{\alpha}\xi^{u}) \\
=&\sum_{(\beta,v)\in M(\alpha,u,r+1)} (-1)^{qt+q|u-v|}\binom{\alpha}{\beta}\mathrm{sgn}(v,u-v) \\
&\cdot \tau\big(\sigma(x^{\beta}\xi^{v})x^{\alpha-\beta}\xi^{u-v}\big) \\
&-\sum_{(\beta,v)\in M(\alpha,u,s+1)} (-1)^{t|u-v|}\mathrm{sgn}(v,u-v) \\
&\cdot \sigma\big(\tau(x^{\beta}\xi^{v})x^{\alpha-\beta}\xi^{u-v}\big).
\end{aligned} \tag{1.12}
$$

对 $r \geq -1$, 定义线性映射 $\widetilde{\mu}_r : G_r \to \mathrm{Hom}(\Omega_{r+1}, G_{-1})$, 使得 $\widetilde{\mu}_r(y) = (-1)^{\frac{1}{2}q(q+1)}\mu_r(y)$, 其中 $q \in \{0, 1\}$, 并且 $\mathrm{d}(y) = \overline{q}$.

设 $\widetilde{\mu} : G \to \mathrm{Hom}_f(\Omega, G_{-1})$ 是由族 $\{\widetilde{\mu}_r \mid r \geq -1\}$ 定义的线性映射, 即 $\widetilde{\mu}|_{G_r} = \widetilde{\mu}_r$, $\forall r \geq -1$. 由引理 1.3 知 μ_r 是单射, 所以 $\widetilde{\mu}_r$ 是单射. 因为 G 与 $\mathrm{Hom}_f(\Omega, G_{-1})$ 都是 $\mathbb{Z}$- 阶化的, 所以 $\widetilde{\mu}$ 是单射.

引理 1.5　设 $y, y' \in G$, 则 $\widetilde{\mu}([y, y']) = [\widetilde{\mu}(y), \widetilde{\mu}(y')]$.

证明 因为 $\widetilde{\mu}$ 是线性映射, 故可设 y 与 y' 关于 $\mathbb{Z}_2$- 阶化与 $\mathbb{Z}$- 阶化都是齐次的. 设 $y \in G_r$, $y' \in G_s$, $\mathrm{d}(y) = \overline{q}$, $\mathrm{d}(y') = \overline{t}$, 其中 $r, s \geq -1$, $q, t \in \{0, 1\}$. 由引理 1.4 与 (1.12) 式知

$$\mu_{r+s}\big([y, y']\big) = (-1)^{qt}[\mu_r(y), \mu_s(y')].$$

因此

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu}\big([y, y']\big) &= \widetilde{\mu}_{r+s}\big([y, y']\big) \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(q+t)(q+t+1)}\mu_{r+s}\big([y, y']\big) \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(q+t)(q+t+1)+qt}[\mu_r(y), \mu_s(y')] \\ &= (-1)^{(q+t)(q+t+1)}[\widetilde{\mu}_r(y), \widetilde{\mu}_s(y')] \\ &= [\widetilde{\mu}_r(y), \widetilde{\mu}_s(y')] \\ &= [\widetilde{\mu}(y), \widetilde{\mu}_(y')]. \qquad \square\end{aligned}$$

因为 $[G_{-1}, G_{-1}] = 0$, 所以 G_{-1} 是 Abel 李超代数. 于是 Ω/J 是 G_{-1} 的泛包络代数. 取 $R = \mathbb{F}$. 由第三章 §1 节知

$$U_R^* = U_R^{(*)} = \mathrm{Hom}_f(\Omega, \mathbb{F}),$$

并且 U_R^* 是一个结合超代数. 简记 U_R^* 为 U^*, 即 $U^* = \mathrm{Hom}_f(\Omega, \mathbb{F})$. 由第三章引理 1.3 知, $\{x^{(\alpha)}x^u \mid \alpha \in A(m),\ u \in B(n)\}$ 是 U^* 的一个 $\mathbb{F}$- 基底, 其中 $x^{(\alpha)}x^u \in \mathrm{Hom}_f(\Omega, \mathbb{F})$, 使得对任意 $x^\beta \xi^v \in \Omega$, 有

$$\begin{aligned}x^{(\alpha)}x^u(ax^\beta\xi^v) &= (-1)^{\mathrm{d}(a)}\varepsilon(a)\delta(\alpha, \beta)\delta(u, v) \\ &= a\delta(\alpha, \beta)\delta(u, v),\end{aligned}$$

这里 $a \in R = \mathbb{F}$, $\delta(\ ,\ )$ 是 Kronecker 符号函数. 由第三章定理 1.7 知, $U^* \cong \Lambda(m, n)$, 从而 $U^* = \bigoplus_{r \geq 0} U_r^*$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化超代数, 其中

$$U_r^* = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\big\{x^{(\alpha)}x^u \bigm| |\alpha| + |u| = r\big\}.$$

设 $r \geq -1$. 定义线性映射 $\eta_r : U_{r+1}^* \otimes G_{-1} \to \mathrm{Hom}(\Omega_{r+1}, G_{-1})$, 使得

$$\eta_r(x^{(\alpha)}x^u \otimes y)(x^\beta\xi^v) := (-1)^{(|u|+q)q}\delta(\alpha, \beta)\delta(u, v)y, \tag{1.13}$$

其中 $q \in \{0, 1\}$, 并且 $\overline{q} = \mathrm{d}(y)$. 考察维数知, η_r 是有限维 $\mathbb{Z}_2$- 阶化空间的同构映射. 于是族 $\{\eta_r \mid r \geq -1\}$ 定义了 $\mathbb{Z}$- 阶化线性空间的同构映射

$$\eta : U^* \otimes G_{-1} \to \mathrm{Hom}_f(\Omega, G_{-1}),$$

使得 $\eta|_{U_{r+1}^* \otimes G_{-1}} = \eta_r$, $\forall r \geq -1$. 设 D_i 是 U^* 的线性变换, $\forall i \in Y$, 且满足

$$\mathrm{D}_i(x^{(\alpha)}x^u) := \begin{cases} x^{(\alpha - \varepsilon_i)}x^u, & i \in Y_0, \\ \mathrm{sgn}(\langle i \rangle, u - \langle i \rangle)x^{(\alpha)}x^{u - \langle i \rangle}, & i \in Y_1. \end{cases} \tag{1.14}$$

若 $j \in Y_0$, 则令 $\lambda(j) = 0,\ z_j = x_j$; 若 $j \in Y_1$, 则令 $\lambda(j) = 1,\ z_j = \xi_j$. 在空间 $U^* \otimes G_{-1}$ 中定义双线性运算 [,], 使得

$$
\begin{aligned}
&[x^{(\alpha)}x^u \otimes z_i, x^{(\beta)}x^v \otimes z_j] = x^{(\alpha)}x^u\big(\mathrm{D}_i(x^{(\beta)}x^v)\big) \otimes z_j \\
&- (-1)^{\left(|u|+\lambda(i)\right)\left(|v|+\lambda(j)\right)} x^{(\beta)}x^v\big(\mathrm{D}_j(x^{(\alpha)}x^u)\big) \otimes z_i,\ \forall i, j \in Y.
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

引理 1.6 $\eta\big([x^{(\alpha)}x^u \otimes z_i, x^{(\beta)}x^v \otimes z_j]\big) = [\eta(x^{(\alpha)}x^u \otimes z_i), \eta(x^{(\beta)}x^v \otimes z_j)]$, 其中 $x^{(\alpha)}x^u \in U^*_{r+1},\ x^{(\beta)}x^v \in U^*_{s+1},\ i, j \in Y$.

证明 我们仅证 $i \in Y_0,\ j \in Y_1$ 的情形. 对 i, j 为其余情形, 证明是相仿的. 由 (1.12) 与 (1.13) 式, 有

$$
\begin{aligned}
&[\eta(x^{(\alpha)}x^u \otimes x_i), \eta(x^{(\beta)}x^v \otimes \xi_j)](x^\gamma \xi^w) \\
=& \sum_{(\rho,e)\in M(\gamma,w,r+1)} (-1)^{|u|(|v|+1)+|u||w-e|} \binom{\gamma}{\rho} \mathrm{sgn}(e, w-e) \\
&\cdot \eta(x^{(\beta)}x^v \otimes \xi_j)\Big(\big(\eta(x^{(\alpha)}x^u \otimes x_i)(x^\rho \xi^e)\big)x^{\gamma\ \ \rho}\xi^{w-e}\Big) \\
&- \sum_{(\rho,e)\in M(\gamma,w,s+1)} (-1)^{(|v|+1)|w-e|} \binom{\gamma}{\rho} \mathrm{sgn}(e, w-e) \\
&\cdot \eta(x^{(\alpha)}x^u \otimes x_i)\Big(\big(\eta(x^{(\beta)}x^v \otimes \xi_j)(x^\rho \xi^e)\big)x^{\gamma-\rho}\xi^{w-e}\Big) \\
=& \sum_{(\rho,e)\in M(\gamma,w,r+1)} (-1)^{|u|(|v|+1)+|u||w-e|} \binom{\gamma}{\rho} \mathrm{sgn}(e, w-e) \\
&\cdot \eta(x^{(\beta)}x^v \otimes \xi_j)\big(\delta(\alpha,\rho)\delta(u,e)x^{\gamma-\rho+\varepsilon_i}\xi^{w-e}\big) \\
&- \sum_{(\rho,e)\in M(\gamma,w,s+1)} (-1)^{(|v|+1)|w-e|+|v|+1} \binom{\gamma}{\rho} \mathrm{sgn}(e, w-e) \\
&\cdot \eta(x^{(\alpha)}x^u \otimes x_i)\big(\delta(\beta,\rho)\delta(u,e)x^{\gamma-\rho}\xi_j\xi^{w-e}\big) \\
=&(-1)^{|u|(|v|+1)+|u||w-u|} \binom{\gamma}{\alpha} \mathrm{sgn}(u, w-u) \\
&\cdot \eta(x^{(\beta)}x^v \otimes \xi_j)(x^{\gamma-\alpha+\varepsilon_i}\xi^{w-u}) \\
&- (-1)^{(|v|+1)|w-v|+|v|+1} \binom{\gamma}{\beta} \mathrm{sgn}(v, w-v)\mathrm{sgn}(\langle j\rangle, w-v) \\
&\cdot \eta(x^{(\alpha)}x^u \otimes x_i)(x^{\gamma-\beta}\xi^{w-v-\langle j\rangle}) \\
=&(-1)^{|u|(|v|+1)+|u||w-u|+|v|+1} \binom{\gamma}{\alpha} \mathrm{sgn}(u, w-u) \\
&\cdot \delta(\beta, \gamma-\alpha+\varepsilon_i)\delta(v, w-v)\xi_j \\
&- (-1)^{(|v|+1)|w-v|+|v|+1} \binom{\gamma}{\beta} \mathrm{sgn}(v, w-v)\mathrm{sgn}(\langle j\rangle, w-v)
\end{aligned}
$$

$$\cdot\,\delta(\alpha,\gamma-\beta)\delta(u,w-v-\langle j\rangle)x_i$$

$$=(-1)^{|u|+|v|+1}\binom{\gamma}{\alpha}\operatorname{sgn}(u,v)\delta(\beta,\gamma-\alpha+\varepsilon_i)\delta(v,w-u)\xi_j$$

$$-(-1)^{(|v|+1)|u-\langle j\rangle|+|v|+1}\binom{\gamma}{\beta}\operatorname{sgn}(v,u-\langle j\rangle)$$

$$\cdot\operatorname{sgn}(\langle j\rangle,u-\langle j\rangle)\delta(\alpha+\beta,\gamma)\delta(u-\langle j\rangle,w-v)x_i$$

$$=(-1)^{|u|+|v|+1}\binom{\alpha+\beta-\varepsilon_i}{\alpha}\operatorname{sgn}(u,v)\delta(\alpha+\beta-\varepsilon_i,\gamma)\delta(u+v,w)\xi_j$$

$$-(-1)^{|u|(|v|+1)}\binom{\alpha+\beta}{\beta}\operatorname{sgn}(\langle j\rangle,u-\langle j\rangle)$$

$$\cdot\operatorname{sgn}(v,u-\langle j\rangle)\delta(\alpha+\beta,\gamma)\delta(u+v-\langle j\rangle,w)x_i.$$

由 (1.15) 与 (1.13) 式, 有

$$\eta\big([x^{(\alpha)}x^u\otimes x_i,x^{(\beta)}x^v\otimes\xi_j]\big)(x^\gamma\xi^w)$$

$$=\eta\big(x^{(\alpha)}x^u x^{(\beta-\varepsilon_i)}x^v\otimes\xi_j\big)(x^\gamma\xi^w)$$

$$-(-1)^{|u|(|v|-1)}\operatorname{sgn}(\langle j\rangle,u-\langle j\rangle)\eta\big(x^{(\beta)}x^v x^{(\alpha)}x^{u-\langle j\rangle}\otimes x_i\big)(x^\gamma\xi^w)$$

$$=\binom{\alpha+\beta-\varepsilon_i}{\alpha}\operatorname{sgn}(u,v)\eta(x^{(\alpha+\beta-\varepsilon_i)}x^{u+v}\otimes\xi_j)(x^\gamma\xi^w)$$

$$-(-1)^{|u|(|v|-1)}\binom{\alpha+\beta}{\beta}\operatorname{sgn}(\langle j\rangle,u-\langle j\rangle)$$

$$\cdot\operatorname{sgn}(v,u-\langle j\rangle)\eta(x^{(\alpha+\beta)}x^{v+u-\langle j\rangle}\otimes x_i)(x^\gamma\xi^w)$$

$$=(-1)^{|u|+|v|+1}\binom{\alpha+\beta-\varepsilon_i}{\alpha}\operatorname{sgn}(u,v)\delta(\alpha+\beta-\varepsilon_i,\gamma)\delta(u+v,w)\xi_j$$

$$-(-1)^{|u|(|v|+1)}\binom{\alpha+\beta}{\beta}\operatorname{sgn}(\langle j\rangle,u-\langle j\rangle)$$

$$\cdot\operatorname{sgn}(v,u-\langle j\rangle)\delta(\alpha+\beta.\gamma)\delta(u+v-\langle j\rangle,w)x_i,$$

所以

$$\eta\big([x^{(\alpha)}x^u\otimes x_i,x^{(\beta)}x^v\otimes\xi_j]\big)=[\eta(x^{(\alpha)}x^u\otimes x_i),\eta(x^{(\beta)}x^v\otimes\xi_j)].$$

引理得证. □

由第一章 §2 节知,

$$\mathrm{W}(m,n)=\operatorname{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_i\mid\alpha\in A(m),\ u\in B(n),\ i\in Y\}.$$

定义线性映射 $g:U^*\otimes G_{-1}\to\mathrm{W}(m,n)$, 使得 $g(x^{(\alpha)}x^u\otimes z_i):=x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_i$. 易见, g 是线

性空间的同构. 利用 (1.15) 式, 直接验证可知

$$g\big([x^{(\alpha)}x^{u}\otimes z_i, x^{(\beta)}x^{v}\otimes z_j]\big)=[g(x^{(\alpha)}x^{u}\otimes z_i), g(x^{(\beta)}x^{v}\otimes z_j)]. \tag{1.16}$$

定理 1.7　设 $\mathrm{char}\mathbb{F}\neq 2$. 令 $G=\bigoplus_{i\geq -1}G_i$ 是 $\mathbb{F}$ 上的可迁的 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数. 设 $\dim(G_{-1}\cap G_{\bar{0}})=m$, $\dim(G_{-1}\cap G_{\bar{1}})=n$, 则存在 G 到李超代数 $\mathrm{W}(m,n)$ 的保持 $\mathbb{Z}$- 阶化的单同态 ϕ, 使得 $\phi(G_{-1})=\mathrm{W}(m,n)_{-1}$.

证明　因为 $\mathrm{W}(m,n)$ 是李超代数, 所以由 (1.16) 式知, (1.15) 式定义的方括号运算使得 $U^*\otimes G_{-1}$ 是李超代数, 并且 g 是 $U^*\otimes G_{-1}$ 到 $\mathrm{W}(m,n)$ 的同构映射. 易见 (1.12) 式定义的运算 $[\,,\,]$ 可以线性扩充到 $\mathrm{Hom}_f(\Omega,G_{-1})$ 上. 由于 $U^*\otimes G_{-1}$ 是李超代数, 于是由引理 1.6 知, $\mathrm{Hom}_f(\Omega,G_{-1})$ 关于它的运算 $[\,,\,]$ 是一个李超代数, 并且 η 是 $U^*\otimes G_{-1}$ 到 $\mathrm{Hom}_f(\Omega,G_{-1})$ 的同构映射. 从而 η^{-1} 是 $\mathrm{Hom}_f(\Omega,G_{-1})$ 到 $U^*\otimes G_{-1}$ 的同构映射. 由引理 1.5 知, $\widetilde{\mu}$ 是 G 到李超代数 $\mathrm{Hom}_f(\Omega,G_{-1})$ 的单同态. 因此 $\phi:=g\eta^{-1}\widetilde{\mu}$ 是 G 到 $\mathrm{W}(m,n)$ 的单同态.

显然 $\{z_i\mid i\in Y\}$ 是 G_{-1} 的 $\mathbb{F}$- 基底. 由 $\widetilde{\mu}$ 与 η 的定义知, $\widetilde{\mu}(z_i)=\eta(z_i)$, 于是 $\eta^{-1}\widetilde{\mu}(z_i)=z_i$. 故 $\phi(z_i)=g\eta^{-1}\widetilde{\mu}(z_i)=g(z_i)=\mathrm{D}_i$, $\forall i\in Y$. 从而可知 $\phi(G_{-1})=\mathrm{W}(m,n)_{-1}$.　□

若 $G=\bigoplus_{i\geq -1}G_i$ 的 $\mathbb{Z}$- 阶化与 $\mathbb{Z}_2$- 阶化是相容的, 则 $G_{-1}=G_{-1}\cap G_{\bar{1}}=V_1$. 所以 $V_0=0$, 故 $m=0$. 由定理 1.7 知, 存在 G 到 $\mathrm{W}(0,n)$ 的单同态 ϕ, 使得 $\phi(G_{-1})=\mathrm{W}(0,n)_{-1}$. 因为 $\mathrm{W}(0,n)$ 就是第一章 §2 节中定义的李超代数 $\mathrm{W}(n)$, 所以有以下推论.

推论 1.8　设 $\mathrm{char}\mathbb{F}\neq 2$. 令 $G=\bigoplus_{i\geq -1}G_i$ 是 $\mathbb{F}$ 上可迁的 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数, $\dim G_{-1}=n$. 若 G 的 $\mathbb{Z}$- 阶化与 $\mathbb{Z}_2$- 阶化是相容的, 则 G 可嵌入到有限维李超代数 $\mathrm{W}(n)$ 中.

下面我们给出定理 1.7 在限制李超代数上的一个应用, 为此需要给出以下几个概念. 以下本节总设 $\mathrm{char}\mathbb{F}=p>2$. 文献 [24] 给出了限制李代数的定义:

定义 1.9　设 L 是域 $\mathbb{F}$ 上的李代数. 若存在 L 到自身的映射 $[p]$, 使得 $a\mapsto a^{[p]}$, $\forall a\in L$, 并且满足

(1)　$\mathrm{ad}\,a^{[p]}=(\mathrm{ad}\,a)^p$, $\forall a\in L$,

(2)　$(ka)^{[p]}=k^pa^{[p]}$, $\forall k\in\mathbb{F}$, $\forall a\in L$,

(3)　$(a+b)^{[p]}=a^{[p]}+b^{[p]}+\sum_{i=1}^{p}s_i(a,b)$, $\forall a,b\in L$.

其中 $is_i(a,b)$ 是 $(\mathrm{ad}\,(a\lambda+b)^{p-1})(a)$ 中 λ^{i-1} 的系数, 则称 $(L,[p])$ 是限制李代数, 简称 L 是限制李代数.

设 H 是限制李代数 $(L,[p])$ 的子代数. 若对任意 $x\in H$, 均有 $x^{[p]}\in H$, 则称 H 是 L 的限制子代数. 显然, L 的限制子代数 H 也是限制李代数.

设 ρ 是限制李代数 L 在空间 V 上的表示, 如果 $\rho(x^{[p]})=\rho(x)^p$, $\forall x\in L$, 则称 ρ 是 L 的一个限制表示.

下面的限制李超代数的定义是由文献 [42] 给出的.

定义 1.10 设 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的李超代数. 若 $L_{\bar{0}}$ 是限制李代数, 并且 $L_{\bar{0}}$-模 $L_{\bar{1}}$ 所提供的表示是限制表示, 则称 L 是限制李超代数.

例 1.11 设 $A = A_{\bar{1}} \oplus A_{\bar{1}}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的结合超代数. 由第一章例 1.7知 A^- 是一个李超代数. 作为线性空间, A 与 A^- 相同, 并且 $(A^-)_{\bar{0}}$ 与 $A_{\bar{0}}$ 相同, $(A^-)_{\bar{1}}$ 与 $A_{\bar{1}}$ 相同. 任取 $x \in A^-$, 令 $x^{[p]} := x^p$ (这里 x^p 表示 p 个 x 在结合代数 A 中的乘积). 直接验证可知(或见文献 [24] 的 188 页), $(A^-)_{\bar{0}}$ 是限制李代数. 任取 $x \in (A^-)_{\bar{0}}$, $y \in (A^-)_{\bar{1}}$, 则有

$$(\operatorname{ad} x)^p(y) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^{p-i}\binom{p}{i}x^i y x^{p-i} = x^p y - y x^p = \operatorname{ad} x^p(y). \tag{1.17}$$

所以 $(\operatorname{ad} x)^p = \operatorname{ad} x^p = \operatorname{ad} x^{[p]}$. 于是 $(A^-)_{\bar{0}}$ 在 $(A^-)_{\bar{1}}$ 上的表示是限制表示, 所以 A^- 是限制李超代数.

特别地, 若 V 是任一个 $\mathbb{Z}_2$- 阶化空间, 由于 $\mathrm{pl}(V) = (\mathrm{End}(V))^-$, 所以 $\mathrm{pl}(V)$ 是限制李超代数.

引理 1.12 若 $A = A_{\bar{1}} \oplus A_{\bar{1}}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的结合超代数. 则 $\mathrm{Der}(A)$ 是限制李超代数.

证明 易见, $\mathrm{Der}(A)$ 是 $\mathrm{pl}(A)$ 的子代数, 所以 $\mathrm{Der}_{\bar{0}}(A)$ 是李代数, 并且它是 $\mathrm{pl}_{\bar{0}}(A)$ 的子代数. 因为 $\mathrm{pl}(A) = (\mathrm{End}(A))^-$, 由例 1.11 知, $\mathrm{pl}(A)$ 是限制李超代数. 并且 $D^{[p]} = D^p$, $\forall D \in \mathrm{pl}(A)$, 特别地, $\mathrm{pl}_{\bar{0}}(A)$ 是限制李代数. 任取 $D \in \mathrm{Der}_{\bar{0}}(A)$. 由 Leibniz 公式知,

$$D^p(ab) = \sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}(D^i a)(D^{p-i}b) = (D^p a)b + a(D^p b),\ \forall a, b \in A.$$

因此 $D^p \in \mathrm{Der}_{\bar{0}}(A)$. 于是 $\mathrm{Der}_{\bar{0}}(A)$ 是 $\mathrm{pl}_{\bar{0}}(A)$ 的限制子代数, 从而 $\mathrm{Der}_{\bar{0}}(A)$ 是限制李代数.

任取 $D \in \mathrm{Der}_{\bar{0}}(A)$, $E \in \mathrm{Der}_{\bar{1}}(A)$. 由 (1.17) 式知,

$$(\operatorname{ad} D)^p(E) = \operatorname{ad} D^p(E).$$

所以 $(\operatorname{ad} D)^p = \operatorname{ad} D^p$, 故 $\mathrm{Der}_{\bar{0}}(A)$ 在 $\mathrm{Der}_{\bar{1}}(A)$ 上的表示是限制表示. 因此 $\mathrm{Der}(A)$ 是限制李超代数. □

命题 1.13 $\mathrm{W}(m, n, \underline{1})$ 是限制李超代数, 其中 $\underline{1} = (1, 1, \cdots, 1)$.

证明 由引理 1.12 知, $\mathrm{Der}\big(\Lambda(m, n, \underline{1})\big)$ 是限制李超代数. 下面证明 $\mathrm{W}(m, n, \underline{1}) = \mathrm{Der}\big(\Lambda(m, n, \underline{1})\big)$.

显然, $\mathrm{W}(m, n, \underline{1}) \subseteq \mathrm{Der}\big(\Lambda(m, n, \underline{1})\big)$. 设 $D \in \mathrm{Der}_\theta\big(\Lambda(m, n, \underline{1})\big)$, 其中 $\theta \in \mathbb{Z}_2$. 断言 $D = \sum_{i \in Y} D(x_i)D_i$. 事实上, $D(x_i) = (\sum_{i \in Y} D(x_i)D_i)(x_i)$; 另一方面, $\Lambda(m, n, \underline{1})$ 可由 $x_1, \cdots, x_s$ 生成. 由于导子由它在代数的生成元上的作用所惟一决定, 所以断言成立, 从而 $\mathrm{Der}\big(\Lambda(m, n, \underline{1})\big) \subseteq \mathrm{W}(m, n, \underline{1})$. 于是 $\mathrm{Der}\big(\Lambda(m, n, \underline{1})\big) = \mathrm{W}(m, n, \underline{1})$. 这就证明了 $\mathrm{W}(m, n, \underline{1})$ 是限制李超代数. □

引理 1.14 1) $\mathrm{W}(m,n)_{-1}\oplus\mathrm{W}(m,n)_1$ 生成的 $\mathrm{W}(m,n)$ 的子代数包含 $\mathrm{W}(m,n,\underline{1})$.

2) 设 $G=\bigoplus_{i\geq -1}G_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化的限制李超代数, 若 $x\in G_{-1}\cap G_{\bar{0}}$, 则 $(\mathrm{ad}\,x)^p=0$.

证明 1) 利用 $p>2$ 可推得 $\mathrm{W}(m,n)_{-1}=\mathrm{W}(m,n,\underline{1})_{-1}$ 与 $\mathrm{W}(m,n)_1=\mathrm{W}(m,n,\underline{1})_1$. 对 r 用归纳法, 直接验证可知

$$[\mathrm{W}(m,n,\underline{1})_r,\mathrm{W}(m,n,\underline{1})_1]=\mathrm{W}(m,n,\underline{1})_{r+1}.$$

从而可推得 1).

2) 设 $x\in G_{-1}\cap G_{\bar{0}}$. 因为 G 是限制李超代数, 所以 $G_{\bar{0}}$ 是限制李代数, 并且 $G_{\bar{0}}$-模 $G_{\bar{1}}$ 所提供的表示是限制的, 从而 $(\mathrm{ad}\,x)^p=\mathrm{ad}\,x^{[p]}$. 因为 $x^{[p]}\in G$, 所以 $\mathrm{ad}\,x^{[p]}$ 的最小 $\mathbb{Z}$- 齐次成分的 $\mathbb{Z}$- 次数 ≥ -1. 若 $(\mathrm{ad}\,x)^p\neq 0$, 则 $(\mathrm{ad}\,x)^p$ 的 $\mathbb{Z}$- 次数是 $-p$. 此与 $(\mathrm{ad}\,x)^p=\mathrm{ad}\,x^{[p]}$ 矛盾, 所以 $(\mathrm{ad}\,x)^p=0$. □

定理 1.15 设 $\mathrm{char}\mathbb{F}=p>2$. 令 $G=\bigoplus_{i\geq -1}G_i$ 是 $\mathbb{F}$ 上的可迁的 $\mathbb{Z}$- 阶化限制李超代数. 设 $\dim(G_{-1}\cap G_{\bar{0}})=m$, $\dim(G_{-1}\cap G_{\bar{1}})=n$. 若 $\dim G_1=s\binom{s}{2}+sm$, 其中 $s=m+n$, 则 $G\cong\mathrm{W}(m,n,\underline{1})$.

证明 由定理 1.7, 可设 G 是 $\mathrm{W}(m,n)$ 的子代数, 并且 $G_{-1}=\mathrm{W}(m,n)_{-1}$, $G_1\subseteq\mathrm{W}(m,n)$. 考察维数知, $G_1=\mathrm{W}(m,n)_1$. 由引理 1.14 的 1) 知, $G\supseteq\mathrm{W}(m,n,\underline{1})$. 若存在 $E\in G$ 使得 $E\notin\mathrm{W}(m,n,\underline{1})$, 由于 $G\subseteq\mathrm{W}(m,n,\underline{1})$, 则可设 $E=\sum_{i=1}^s f_i\mathrm{D}_i$, 其中 $f_i\in\Lambda(m,n)$, 并且有某个 $f_i\notin\Lambda(m,n,\underline{1})$. 于是存在 $j\in Y_0$, 使得 $\mathrm{D}_j^p(f_i)\neq 0$. 从而可知 $(\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_j)^p(E)\neq 0$; 特别地, $(\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_j)^p\neq 0$. 此与引理 1.14 的 2) 矛盾, 所以 $G=\mathrm{W}(m,n,\underline{1})$. □

推论 1.16 设 $G=\bigoplus_{i\geq -1}G_i$ 是具有相容 $\mathbb{Z}$- 阶化的可迁的限制李超代数. 令 $\dim G_{-1}=n$. 若 $\dim G_1=n\binom{n}{2}$, 则 G 同构于李超代数 $\mathrm{W}(n)$.

证明 由推论 1.8, 在同构的意义下, 可设 G 是 $\mathrm{W}(n)$ 的子代数, 并且 $G_{-1}=\mathrm{W}(n)_{-1}$, $G_1\subseteq\mathrm{W}(n)_1$. 因为 $\dim G_{-1}=n\binom{n}{2}=\dim\mathrm{W}(n)_1$, 所以 $G_1=\mathrm{W}(n)_1$. 又因为 $\mathrm{W}(n)_{-1}\cup\mathrm{W}(n)_1$ 生成 $\mathrm{W}(n)$, 所以 $G=\mathrm{W}(n)$. □

§2 利用底部确定 W 型与 S 型李超代数

在本节中, 我们利用上节的嵌入定理, 确定出底部的零次成分为一般线性李超代数与特殊线性李超代数的深度 1 的 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数. 本节总设 $\mathrm{char}\mathbb{F}=p>3$, 在定理 2.12 中, 我们还设 $\mathbb{F}$ 是代数闭域. 首先叙述文献 [31] 给出的除幂代数的定义.

设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上的 m 维线性空间. V 上的除幂代数$\mathcal{U}(V)$ 是具有生成元集 $\{x^{(h)}\mid x\in V,\ h\in\mathbb{N}_0\}$ 与以下定义关系的 $\mathbb{F}$- 代数:

$$(x+y)^{(h)}=\sum_{i=0}^{h}x^{(i)}y^{(h-i)},\qquad (ax)^{(h)}=a^hx^{(h)},$$

$$x^{(h)}x^{(k)} = \binom{h+k}{h} x^{(h+k)}, \qquad x^{(h)}y^{(k)} = y^{(k)}x^{(h)},$$

$$x^{(0)} = 1,$$

其中 $x, y \in V$, $a \in \mathbb{F}$, $h, k \in \mathbb{N}_0$. 设 $x_1, \cdots, x_m$ 是 V 的基底. 由以上的定义关系可知, $\mathcal{U}(V)$ 是一个交换代数, 并且 $\mathcal{U}(V)$ 的任一元素可表为以下形式:

$$\sum a_{\alpha_1\cdots\alpha_m} x_1^{(\alpha_1)} \cdots x_m^{(\alpha_m)},$$

其中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{N}_0$, $a_{\alpha_1\cdots\alpha_m} \in \mathbb{F}$. 我们简记 $\mathcal{U}(V)$ 中元素 $x_1^{(\alpha_1)} \cdots x_m^{(\alpha_m)}$ 为 $x^{(\alpha)}$, 其中 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$. 于是 $x_i^{(k)} = x^{(k\varepsilon_i)}$, $k \in \mathbb{N}_0$. 仍记 $x_i^{(1)} = x^{(\varepsilon_i)}$ 为 x_i, $i \in Y_0$. 令 $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_m) \in \mathbb{N}_0^m$, 则 $x^{(\beta)} \in \mathcal{U}(V)$. 显然

$$x^{(\alpha)}x^{(\beta)} = x_1^{(\alpha_1)} \cdots x_m^{(\alpha_m)} x_1^{(\beta_1)} \cdots x_m^{(\beta_m)} = \binom{\alpha+\beta}{\alpha} x^{(\alpha+\beta)}.$$

所以 $\mathcal{U}(V)$ 就是第一章 §2 节中定义的除幂代数 $\mathcal{U}(m)$. 在本节中, 我们不用 $\mathcal{U}(m)$, 而是用 $\mathcal{U}(V)$ 表示 V 上的除幂代数, 目的是以后将在 V 上附加有用的条件.

我们仍用 $\Lambda(n)$ 表示具有 n 个生成元 $x_{m+1}, \cdots, x_s$ 的外代数, 其中 $s = m + n$. 令 $\Lambda(V, n) = \mathcal{U}(V) \otimes \Lambda(n)$, 则 $\Lambda(V, n) = \Lambda(m, n)$. 同样, 我们有

$$\mathrm{W}(V, n) = \left\{ \sum_{i=1}^{s} f_i \mathrm{D}_i \;\middle|\; f_i \in \Lambda(V, n),\ i \in Y \right\} = \mathrm{W}(m, n),$$

$$\mathrm{S}(V, n) = \mathrm{span}_{\mathbb{F}} \left\{ \mathrm{D}_{ij}(f) \mid f \in \Lambda(V, n),\ i, j \in Y \right\} = \mathrm{S}(m, n),$$

$$\overline{\mathrm{S}}(V, n) := \{ y \in \mathrm{W}(V, n) \mid \mathrm{div}(y) = 0 \},$$

其中 $\mathrm{div} : \mathrm{W}(V, n) \to \Lambda(V, n)$ 是线性映射, 使得

$$\mathrm{div}(f\mathrm{D}_i) = (-1)^{\mathrm{d}(f)\tau(i)} \mathrm{D}_i(f), \quad \forall f \in \mathrm{hg}(\Lambda(V, n)),\ \forall i \in Y.$$

引理 2.1 $\mathrm{S}(V, n) = \overline{\mathrm{S}}(V, n)$.

证明 由第二章引理 3.9 的证明知, $\mathrm{div}(\mathrm{D}_{ij}(f)) = 0$, $\forall i, j \in Y$, $f \in \Lambda(V, n)$, 所以 $\mathrm{S}(V, n) \subseteq \overline{\mathrm{S}}(V, n)$.

设 $y \in \overline{\mathrm{S}}(V, n)$, 分以下两个步骤证明 $y \in \mathrm{S}(V, n)$.

(i) $y = f\mathrm{D}_m$. 可设 $f = \sum_{\alpha, u} a_{\alpha u} x^{(\alpha)} x^u$, 其中 $\alpha \in \mathbb{N}_0^m, u \in B(n), a_{\alpha u} \in \mathbb{F}$. 因为 $\mathrm{div}(y) = 0$, 所以

$$\sum_{\alpha, u} a_{\alpha u} x^{(\alpha - \varepsilon_m)} x^u = 0. \tag{2.1}$$

令 $R(m) = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^m \mid \alpha_m = 0\}$. 若 $\alpha \in \mathbb{N}_0^m \backslash R(m)$, 由 (2.1) 式可知 $a_{\alpha u} = 0$, 所以

$$y = \sum_{a \in R(m), u \in B(n)} a_{\alpha u} x^{(\alpha)} x^u \mathrm{D}_m$$

$$= \sum_{a\in R(m),u\in B(n)} a_{\alpha u}\mathrm{D}_{1m}(x^{(\alpha+\varepsilon_1)}x^u) \in \mathrm{S}(V,n).$$

(ii) $\qquad y = \sum_{i=1}^{s}\sum_{\alpha,u} a^i_{\alpha u}x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_i, \quad a^i_{\alpha u}\in\mathbb{F}. \qquad (2.2)$

若 $i\in Y_0$, 则

$$x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_i = \mathrm{D}_{mi}(x^{(\alpha+\varepsilon_m)}x^u) + x^{(\alpha+\varepsilon_m-\varepsilon_i)}x^u\mathrm{D}_m. \tag{2.3}$$

若 $i\in Y_1$, 由 $\mathrm{D}_i(x^{(u)}) = \mathrm{sgn}(\langle i\rangle, u-\langle i\rangle)x^{u-\langle i\rangle}$ 可知

$$\begin{aligned} x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_i =& (-1)^{|u|}\mathrm{sgn}(\langle i\rangle, u-\langle i\rangle)x^{(\alpha+\varepsilon_m)}x^{u-\langle i\rangle}\mathrm{D}_m \\ &+ \mathrm{D}_m(x^{(\alpha+\varepsilon_m)}x^u). \end{aligned} \tag{2.4}$$

由 (2.2), (2.3) 与 (2.4) 式可得 $y = f\mathrm{D}_m + z$, 其中 $f\in\Lambda(V,n)$, $z\in\mathrm{S}(V,n)$. 由 (i) 知 $f\mathrm{D}_m\in\mathrm{S}(V,n)$, 因此 $y\in\mathrm{S}(V,n)$. 所以 $\mathrm{S}'(V,n)\subseteq\mathrm{S}(V,n)$. □

引理 2.2 设 $y\in\mathrm{W}(V,n)_k$, 其中 $k\geq 1$. 若 $[\mathrm{D}_j, y]\in\mathrm{S}(V,n)_{k-1}$, $\forall j\in Y$, 则 $y\in\mathrm{S}(V,n)_k$.

证明 设 $y=\sum_{i=1}^{s} f_i\mathrm{D}_i$. 因为 $[\mathrm{D}_j,y]\in\mathrm{S}(V,n)_{k-1}\subseteq\overline{\mathrm{S}}(V,n)$, 所以 $\mathrm{div}([\mathrm{D}_j,y]) = 0$, $\forall j\in Y$. 于是

$$\sum_{i=1}^{s}(-1)^{\left(\mathrm{d}(f_i)+\tau(j)\right)\tau(i)}\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j(f_i) = 0.$$

所以

$$\mathrm{D}_j\left(\sum_{i=1}^{s}(-1)^{\mathrm{d}(f_i)\tau(i)}\mathrm{D}_i(f_i)\right) = 0.$$

因此 $\mathrm{D}_j(\mathrm{div}(y)) = 0$, $\forall j\in Y$. 故 $\mathrm{div}(y)\in\Lambda(V,n)_0\cap\Lambda(V,n)_1 = 0$. 于是

$$y\in\overline{\mathrm{S}}(V,n)\cap\mathrm{W}(V,n)_k = \overline{\mathrm{S}}(V,n)_k = \mathrm{S}(V,n)_k. \qquad \square$$

设 $h=\sum_{i=1}^{s}x_i\mathrm{D}_i$, $\widetilde{\mathrm{W}} = \{fh \mid f\in\Lambda(V,n)\}$, $\widetilde{\mathrm{W}}_1 = \widetilde{\mathrm{W}}\cap\mathrm{W}(V,n)$.

引理 2.3 1) $[\widetilde{\mathrm{W}}_1, \widetilde{\mathrm{W}}_1] = 0$.

2) $\widetilde{\mathrm{W}}_1$ 是不可约的 $X(V,n)_0$- 模, 其中 $X = \mathrm{W}, \widetilde{\mathrm{W}}$ 或 S.

证明 易见 $\{x_kh \mid k\in Y\}$ 是 $\widetilde{\mathrm{W}}_1$ 的 $\mathbb{F}$- 基底.

1) 由第一章引理 2.5 的 1) 知

$$\begin{aligned} [x_kh, x_lh] &= x_kh(x_l)h - (-1)^{\tau(k)\tau(l)}x_lh(x_k)h \\ &= x_kx_lh - (-1)^{\tau(k)\tau(l)}x_lx_kh = 0, \end{aligned}$$

所以 $[\widetilde{\mathrm{W}}_1, \widetilde{\mathrm{W}}_1] = 0$.

2) 设 $x_i\mathrm{D}_l\in\mathrm{W}(V,n)_0$. 则

$$[x_i\mathrm{D}_l, x_lh] = \sum_{k=1}^{s}[x_i\mathrm{D}_l, x_lx_k\mathrm{D}_k]$$

$$= \sum_{k=1}^{s} x_i x_k \mathrm{D}_k + (-1)^{\tau(l)} x_i x_l \mathrm{D}_l - (-1)^{\big(\tau(i)+\tau(l)\big)\tau(l)} x_l \mathrm{D}_i \mathrm{D}_l$$

$$= \sum_{k=1}^{s} x_i x_k \mathrm{D}_k = x_i h \in \widetilde{\mathrm{W}}_1.$$

若 $j \neq l$, 则

$$[x_i\mathrm{D}_j, x_l h] = \left[x_i\mathrm{D}_j, \sum_{k=1}^{s} x_l x_k \mathrm{D}_k\right] = 0 \ \in \widetilde{\mathrm{W}}_1.$$

所以 $\widetilde{\mathrm{W}}_1$ 是 $\mathrm{W}(V,n)$- 模, 从而 $\widetilde{\mathrm{W}}_1$ 也是 $\overline{\mathrm{S}}(V,n)$- 模与 $\mathrm{S}(V,n)$- 模.

设 M 是 $\mathrm{S}(V,n)_0$- 模 $\widetilde{\mathrm{W}}_1$ 的非零子模, $\sum_{k=1}^{s} a_k(x_k h)$ 是 M 的非零元, 其中 $a_k \in \mathbb{F}$. 不妨设 $a_l \neq 0$. 设 $i \in Y\backslash\{l\}$, 则 $x_i\mathrm{D}_l \in \mathrm{S}(V,n)_0$, 并且

$$[x_i\mathrm{D}_l, \sum_{k=1}^{s} a_k(x_k h)] = a_l x_i h \ \in M.$$

所以 $x_i h \in M$, $\forall i \in Y\backslash\{l\}$. 又因为 $[x_l\mathrm{D}_i, x_i h] = x_l h \in M$, 所以 M 包含 $\widetilde{\mathrm{W}}_1$ 的 $\mathbb{F}$- 基底, 故 $M = \widetilde{\mathrm{W}}_1$. 这就证明了 $\widetilde{\mathrm{W}}_1$ 是不可约的 $\mathrm{S}(V,n)$- 模, 从而 $\widetilde{\mathrm{W}}_1$ 也是不可约的 $\overline{\mathrm{S}}(V,n)$- 模与不可约的 $\mathrm{W}(V,n)$- 模. □

引理 2.4 设 $L = \bigoplus_{i\geq -1} L_i$ 是 $\mathrm{W}(V,n)$ 的 $\mathbb{Z}$- 阶化子代数, 并且 $L_1 \neq 0$. 令 $I = \{a_{ilj}x_i x_l \mathrm{D}_j \mid i,l,j \in Y,\ j \notin \{i,l\},\ a_{ilj} \in \mathbb{F}\}$. 若 $L_1 \cap I = \{0\}$, 并且 $L_i \subseteq \mathrm{S}(V,n)_i$, $i = -1, 0$, 则 $L_1 = \widetilde{\mathrm{W}}_1$.

证明 设 $y = \sum_{k=1}^{s} f_k \mathrm{D}_k$ 是 L_1 的 $\mathbb{Z}_2$- 齐次元素. 令 $i \in Y_0$, $j \in Y_0\backslash\{i\}$, 则 $x_i\mathrm{D}_j \in \overline{\mathrm{S}}(V,n)_0 = \mathrm{S}(V,n)_0 \subseteq L_0$. 再由 $y \in L_1$ 知 $(\mathrm{ad}\, x_i\mathrm{D}_j)^3(y) \in L_1$, 于是

$$(\mathrm{ad}\, x_i\mathrm{D}_j)^3(y) = -3\big(\mathrm{D}_j^2(f_i)\big)x_i x_i \mathrm{D}_j \ \in L_1 \cap I.$$

由已知 $L_1 \cap I = \{0\}$, 所以 $\mathrm{D}_j^2(f_i) = 0$. 令 $j \in Y_0$, $i \in Y_1$, 取 $l \in Y_0\backslash\{j\}$, 则 $\mathrm{D}_j^2(f_l) = 0$. 于是

$$(\mathrm{ad}\, x_l\mathrm{D}_j)^2(\mathrm{ad}\, x_i\mathrm{D}_j)(y) = -(-1)^{\mathrm{d}(y)} 2\big(\mathrm{D}_j^2(f_i)\big)x_l x_l \mathrm{D}_j \ \in L_1 \cap I = \{0\}.$$

因此 $\mathrm{D}_j^2(f_i) = 0$.

若 $j \in Y_1$, 显然 $\mathrm{D}_j^2(f_i) = 0$. 综上, 我们有

$$\mathrm{D}_j^2(f_i) = 0, \qquad i,j \in Y,\ i \neq j. \tag{2.5}$$

设 $i,j,l \in Y$, 并且 i,j,l 互不相同. 若 $i \in Y_1$, 取 $h \in Y\backslash\{i,j,l\}$, 由计算知

$$\Big[x_h\mathrm{D}_j, \big[x_i\mathrm{D}_l, [x_i\mathrm{D}_j, y]\big]\Big]$$
$$= -(-1)^{\big(\tau(i)+\tau(j)\big)\mathrm{d}(y)+\big(\tau(h)+\tau(j)\big)\tau(i)}\big(\mathrm{D}_j\mathrm{D}_l(f_i)\big)x_i x_h \mathrm{D}_j \ \in L_1 \cap I = \{0\},$$

所以 $\mathrm{D}_j\mathrm{D}_l(f_i) = 0$. 设 $i \in Y_0$. 若 $j \in Y_0$, 利用 $\mathrm{D}_j^2(f_i) = 0$, 则可算得

$$\Big[x_i\mathrm{D}_j, \big[x_i\mathrm{D}_j, [x_i\mathrm{D}_j, y]\big]\Big] = -2\big(\mathrm{D}_j\mathrm{D}_l(f_i)\big)x_i x_i \mathrm{D}_j \ \in L_1 \cap I = \{0\}.$$

所以

$$\mathrm{D}_j\mathrm{D}_l(f_i)=0,\qquad i,j\in Y_0,\ l\in Y\backslash\{i,j\}. \tag{2.6}$$

若 $j,l\in Y_1$, 取 $h\in Y_0\backslash\{i\}$, 由 (2.6) 式知 $\mathrm{D}_h\mathrm{D}_l(f_i)=0$, $\mathrm{D}_h\mathrm{D}_j(f_i)=0$, 于是可得

$$\Big[x_i\mathrm{D}_h,\big[x_i\mathrm{D}_l,[x_i\mathrm{D}_j,y]\big]\Big]=\big(\mathrm{D}_j\mathrm{D}_l(f_i)\big)x_ix_i\mathrm{D}_h\ \in L_1\cap I=\{0\}.$$

所以 $\mathrm{D}_j\mathrm{D}_l(f_i)=0$. 综上知, 若 i,j,l 互异, 则

$$\mathrm{D}_j\mathrm{D}_l(f_i)=0. \tag{2.7}$$

由 (2.5) 与 (2.7) 式可知, f_i 中不含有形如 ax_jx_j 与 bx_jx_l 的项, 其中 $a,b\in\mathbb{F}$, $j,l\neq i$. 于是可设

$$f_i=\left(\sum_{r=1}^{s}a_{ir}x_r\right)x_i,\qquad \forall i\in Y,$$

其中 $a_{ir}\in\mathbb{F}$. 因而 $y=\sum_{k=1}^{s}f_k\mathrm{D}_k=\sum_{k=1}^{s}\Big(\sum_{r=1}^{s}a_{kr}x_r\Big)x_k\mathrm{D}_k=y_0+y_1$, 这里

$$y_0=\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{r=1}^{m}a_{kr}x_r\right)x_k\mathrm{D}_k\ \in L_1\cap L_{\overline{0}},$$
$$y_1=\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{r=m+1}^{s}a_{kr}x_r\right)x_k\mathrm{D}_k\ \in L_1\cap L_{\overline{1}}.$$

因为 y 是 $\mathbb{Z}_2$- 齐次元素, 故 $y=y_0$ 或者 $y=y_1$.

若 $y=y_0$, 取 $i,j\in Y_0$, $i\neq j$. 由计算知

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}\,x_i\mathrm{D}_j)^2(y_0)&=(\mathrm{ad}\,x_i\mathrm{D}_j)^2\left(\sum_{k=1}^{s}\sum_{r=1}^{m}a_{kr}x_rx_k\mathrm{D}_k\right)\\&=2(a_{jj}-a_{ij})x_ix_i\mathrm{D}_j\ \in L_1\cap I=\{0\}.\end{aligned}$$

所以

$$a_{jj}=a_{ij},\qquad i,j\in Y_0,\ i\neq j. \tag{2.8}$$

任取 $j\in Y_0$, $i\in Y_1$. 设 $l\in Y_0\backslash\{j\}$, 则有

$$\begin{aligned}\big[x_l\mathrm{D}_j,[x_i\mathrm{D}_j,y]\big]&=(2a_{jj}-a_{ij}-a_{lj})x_ix_l\mathrm{D}_j\\&=(a_{jj}-a_{ij})x_ix_l\mathrm{D}_j\ \in L_1\cap I=\{0\}.\end{aligned}$$

于是

$$a_{jj}=a_{ij},\qquad j\in Y_0,\ i\in Y_1. \tag{2.9}$$

由 (2.8) 与 (2.9) 式可得

$$
\begin{aligned}
y = y_0 &= \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{r=1}^{m} a_{kr}x_r\right) x_k\mathrm{D}_k = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right) x_i\mathrm{D}_i \\
&= \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{jj}x_j\right) x_i\mathrm{D}_i = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{jj}x_j\right) h \ \in \widetilde{\mathrm{W}}_1.
\end{aligned}
$$

若 $y = y_1$, 任取 $j \in Y_1$, $i \in Y\backslash\{j\}$, 则可算得

$$
\big[x_i\mathrm{D}_j, [x_1\mathrm{D}_j, y_1]\big] = (a_{1j} - a_{ij})x_1x_i\mathrm{D}_j \ \in L_1 \cap I = \{0\}.
$$

因此

$$
a_{1j} = a_{ij}, \qquad j \in Y_1,\ i \in Y\backslash\{j\}. \tag{2.10}
$$

由 (2.10) 式可得

$$
\begin{aligned}
y = y_1 &= \sum_{k=1}^{s}\ \sum_{r=m+1}^{s} a_{kr}x_rx_k\mathrm{D}_k \\
&= \sum_{i=1}^{s}\ \sum_{j=m+1}^{s} a_{ij}x_jx_i\mathrm{D}_i \\
&= \sum_{i=1}^{s}\ \sum_{j=m+1}^{s} a_{1j}x_jx_i\mathrm{D}_i \\
&= \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=m+1}^{s} a_{1j}x_j\right) x_i\mathrm{D}_i \\
&= \left(\sum_{j=m+1}^{s} a_{1j}x_j\right) h \ \in \widetilde{\mathrm{W}}_1.
\end{aligned}
$$

于是 $L_1 \subseteq \widetilde{\mathrm{W}}_1$. 故 L_1 是 $\widetilde{\mathrm{W}}_1$ 的非零的 $\mathrm{S}(V,n)_0$- 子模. 由引理 2.3 知 $\widetilde{\mathrm{W}}_1$ 是不可约的 $\mathrm{S}(V,n)_0$- 模, 所以 $L_1 = \widetilde{\mathrm{W}}_1$. □

引理 2.5 设 $L = \bigoplus_{i\geq -1} L_i$ 是 $\mathrm{W}(V,n)$ 的 $\mathbb{Z}$- 阶化子代数, 并且 $L_i = X(V,n)_i$, 其中 $X = \mathrm{W}$ 或 S, $i = -1, 0$. 设 $0 \neq x_rx_t\mathrm{D}_k \in L_1$, 这里 $k \notin \{r,t\}$. 则以下结论成立:

1) 存在 $l \in Y_0$, $l \neq k$, 使得 $x_l^{(2)}\mathrm{D}_k \in L_1$.

2) $x_i^{(2)}\mathrm{D}_j \in L_1$, $\quad \forall i \in Y_0$, $j \in Y\backslash\{i\}$.

3) $\mathrm{S}(V,n)_1 \subseteq L_1$.

4) 若 $X = \mathrm{S}$, 则 $L_1 = \mathrm{S}(V,n)_1$.

5) 若 $X = \mathrm{W}$, 则 $L_1 = \mathrm{S}(V,n)_1$ 或 $\mathrm{W}(V,n)_1$.

证明 1) 若 $r = t$, 因 $x_rx_t\mathrm{D}_k \neq 0$, 所以 $r = t \leq m$. 则 $x_r^{(2)}\mathrm{D}_k = 2^{-1}x_rx_t\mathrm{D}_k \in L_1$. 若 $r \neq t$, 当 $r \in Y_0$ 时,

$$
x_r^{(2)}\mathrm{D}_k = 2^{-1}[x_r\mathrm{D}_t, x_rx_t\mathrm{D}_k] \in L_1.
$$

当 $r, t \in Y_1$ 时, 取 $l \in Y_0$, $l \neq k$, 则

$$x_l^{(2)}\mathrm{D}_k = 2^{-1}\big[x_l\mathrm{D}_r, [x_l\mathrm{D}_t, x_r x_t\mathrm{D}_k]\big] \in L_1.$$

2) 由 1) 知 $x_l^{(2)}\mathrm{D}_k \in L_1$, 其中 $l \in Y_0$, $l \neq k$.

(a) 若 $i \neq k$, $j = k$, 因 $x_l^{(2)}\mathrm{D}_k \in L_1$, 故可设 $i \neq l$, 所以

$$x_i^{(2)}\mathrm{D}_k = 2^{-1}(\mathrm{ad}\, x_i\mathrm{D}_l)^2(x_l^{(2)}\mathrm{D}_k) \in L_1.$$

若 $l \neq k$, $j \neq k$, 则 $x_i^{(2)}\mathrm{D}_j = [x_i^{(2)}\mathrm{D}_k, x_k\mathrm{D}_j] \in L_1$.

(b) 若 $i = k$, $j \neq l$, 则 $x_l^{(2)}\mathrm{D}_i = x_l^{(2)}\mathrm{D}_k \in L_1$, 所以 $x_l^{(2)}\mathrm{D}_j = [x_l^{(2)}\mathrm{D}_i, x_i\mathrm{D}_j] \in L_1$. 因此

$$x_i^{(2)}\mathrm{D}_j = 2^{-1}\big[x_i\mathrm{D}_l, [x_i\mathrm{D}_l, x_l^{(2)}\mathrm{D}_j]\big] \in L_1.$$

若 $i = k$, $j = l$, 则 $x_j^{(2)}\mathrm{D}_i = x_l^{(2)}\mathrm{D}_k \in L_1$. 设 $h \in Y\backslash\{i, j\}$, 则

$$x_j^{(2)}\mathrm{D}_h = [x_j^{(2)}\mathrm{D}_i, x_i\mathrm{D}_h] \in L_1.$$

所以

$$x_i^{(2)}\mathrm{D}_h = 2^{-1}(\mathrm{ad}\, x_i\mathrm{D}_j)^2(x_j^{(2)}\mathrm{D}_h) \in L_1.$$

于是 $x_i^{(2)}\mathrm{D}_j = [x_i^{(2)}\mathrm{D}_h, x_h\mathrm{D}_j] \in L_1$.

3) 只需证明 $\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^u) \in L_{\bar{1}}$, 其中 $|\alpha| + |u| = 3$, $i, j \in Y$.

若 $i, j \in Y_1$, 要证明 $\mathrm{D}_{ij}(x_i x_j x_k)$, $\mathrm{D}_{ij}(x_i x_k x_l)$, $\mathrm{D}_{ij}(x_j x_k x_l)$, $\mathrm{D}_{ii}(x_i x_k x_l)$, $\mathrm{D}_{jj}(x_j x_k x_l) \in L_1$, 其中 $k, l \notin \{i, j\}$. 令 $r \in Y_0$, $r \neq k$. 由 2) 知 $x_i x_r\mathrm{D}_j = [x_i\mathrm{D}_r, x_r^{(2)}\mathrm{D}_j] \in L_1$, 则

$$x_i x_k\mathrm{D}_j = (-1)^{\tau(k)\tau(i)}[x_k\mathrm{D}_r, x_i x_r\mathrm{D}_j] \in L_1.$$

所以

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{ij}(x_i x_j x_k) &= -[x_j\mathrm{D}_i, x_i x_k\mathrm{D}_j] \in L_1,\\
\mathrm{D}_{ij}(x_i x_k x_l) &= -(-1)^{\tau(k)\tau(l)}[x_l\mathrm{D}_i, x_i x_k\mathrm{D}_j] \in L_1,\\
\mathrm{D}_{ii}(x_i x_k x_l) &= -2[x_j\mathrm{D}_i, \mathrm{D}_{ij}(x_i x_k x_l)] \in L_1.
\end{aligned}$$

类似可得 $\mathrm{D}_{ij}(x_j x_k x_l) \in L_1$, $\mathrm{D}_{jj}(x_i x_k x_l) \in L_1$.

对 i 与 j 的其它情形, 证明是相似的.

4) 因为 $L_i = \mathrm{S}(V, n)_i$, $i = -1, 0$, 所以, 由引理 2.2 可知 $L_1 \subseteq \mathrm{S}(V, n)_1$. 由 3) 知 $L_1 = \mathrm{S}(V, n)_1$.

5) 由 3) 知 $\mathrm{S}(V, n)_1 \subseteq L_1$. 设 $\mathrm{S}(V, n)_1 \neq L_1$, 并令 $y \in L_1\backslash\mathrm{S}(V, n)_1$, 则 $\mathrm{div}(y) \neq 0$. 设 $\mathrm{div}(y) = \sum_{i=1}^{s}\beta_i x_i$, 其中 $\beta_i \in \mathbb{F}$. 令 $z_j = \left(\sum_{i=1}^{s}\beta_i x_j x_i\right)\mathrm{D}_j$, $\forall j \in Y$, 则 $\mathrm{div}(y - z_j) = 0$. 所以 $y - z_j \in \mathrm{S}(V, n)_1 \subseteq L_1$. 因此 $z_j \in L_1$, $\forall j \in Y_0$. 设 β_t 是 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 中第一个非零元素.

(a) 若 $t \in Y_0$, 则 $z_t = \left(\sum_{i=t}^{s} \beta_i x_t x_i\right)\mathrm{D}_t$. 由引理 2.1 知

$$\sum_{i=t+1}^{s} \beta_t x_k x_i \mathrm{D}_t \in \mathrm{S}(V,n)_1 \subseteq L_1, \qquad k \in Y\backslash\{t\},$$

所以

$$\beta_t x_k x_t \mathrm{D}_t = [x_k \mathrm{D}_t, z_t] - \sum_{i=t+1}^{s} \beta_i x_k x_i \mathrm{D}_t \in L_1.$$

因此 $x_t x_k \mathrm{D}_t \in L_1$, $\forall k \in Y\backslash\{t\}$. 于是

$$x_t^{(2)}\mathrm{D}_t = (2\beta_t)^{-1}\left(z_t - \left(\sum_{k=t+1}^{s} \beta_k x_t x_k\right)\mathrm{D}_t\right) \in L_1.$$

易见

$$\left\{x_t^2 \mathrm{D}_t + \mathrm{S}(V,n)_1, x_t x_k \mathrm{D}_t + \mathrm{S}(V,n)_1 \;\middle|\; k \in Y\backslash\{t\}\right\}$$

是 $\mathrm{W}(V,n)_1/\mathrm{S}(V,n)_1$ 的基底. 由此可推得 $L_1 = \mathrm{W}(V,n)_1$.

(b) 若 $t \in Y_1$, 则 $z_j = \left(\sum_{i=t}^{s} \beta_i x_j x_i\right)\mathrm{D}_j \in L_1$, $\forall j \in Y_0$. 因此

$$x_j x_t \mathrm{D}_j = \beta_t^{-1}[x_t \mathrm{D}_t, z_j] \in L_1, \quad \forall j \in Y_0.$$

所以

$$x_2 x_1 \mathrm{D}_2 = [x_1 \mathrm{D}_t, x_2 x_t \mathrm{D}_2] \in L_1,$$

$$x_1 x_l \mathrm{D}_1 = [x_l \mathrm{D}_t, x_1 x_t \mathrm{D}_1] \in L_1, \quad l \notin \{t, 1\}.$$

易见

$$\{x_2 x_1 \mathrm{D}_2 + \mathrm{S}(V,n)_1, x_1 x_l \mathrm{D}_1 + \mathrm{S}(V,n)_1 \mid l = 2, \cdots, s\}$$

构成了 $\mathrm{W}(V,n)_1/\mathrm{S}(V,n)_1$ 的一个基底, 于是可推得 $L_1 = \mathrm{W}(V,n)_1$. □

由引理 2.4 与 2.5 可得以下引理.

引理 2.6 设 $L = \bigoplus_{i\geq -1} L_i$ 是 $\mathrm{W}(V,n)$ 的 $\mathbb{Z}$- 阶化子代数, $L_1 \neq 0$.

1) 若 $L_i = \mathrm{W}(V,n)_i$, $i = -1, 0$, 则 $L_1 = \widetilde{\mathrm{W}}_1$, $\mathrm{S}(V,n)_1$ 或者 $\mathrm{W}(V,n)_1$.

2) 若 $L_i = \mathrm{S}(V,n)_i$, $i = -1, 0$, 则 $L_1 = \widetilde{\mathrm{W}}_1$ 或者 $\mathrm{S}(V,n)_1$.

令 V_{-1} 是 $\mathbb{F}$ 上的 Abel 李超代数, 则 $[x,y] = 0$, $\forall x, y \in V_{-1}$. 设 $V_0 = \mathrm{pl}(V_{-1})$ 是 $\mathbb{Z}_2$-阶化空间 V_{-1} 的一般线性李超代数, 则 $V_{-1} \oplus V_0$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化的李超代数, 它的李运算在 V_i 上的限制与 V_i 的李运算相同, $i = -1, 0$, 并且 $[f, x] = f(x)$, $\forall f \in V_0$, $x \in V_{-1}$. 令 $V_0 = \mathrm{spl}(V_{-1})$ 是 V_{-1} 的特殊线性李超代数. 同理 $V_{-1} \oplus V_0$ 是一个 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数,

定理 2.7 设 $\mathrm{char}\mathbb{F} = p > 3$. 令 $L = \bigoplus_{i\geq -1} L_i$ 是 $\mathbb{F}$ 上的可迁的 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数. 设 $\dim L_{-1} < \infty$, $L_1 \neq 0$, $L_2 = 0$.

1) 若 L 的底部 $L_{-1}\oplus L_0$ 同构于李超代数 $L_{-1}\oplus \mathrm{pl}(L_{-1})$, 则 L 同构于 $\mathrm{W}(V,n)$ 的子代数 $\mathrm{W}(V,n)_{-1}\oplus \mathrm{W}(V,n)_0\oplus \widetilde{\mathrm{W}}_1$.

2) 若 L 的底部 $L_{-1}\oplus L_0$ 同构于李超代数 $L_{-1}\oplus \mathrm{spl}(L_{-1})$, 则 L 同构于 $\mathrm{W}(V,n)$ 的子代数 $\mathrm{S}(V,n)_{-1}\oplus \mathrm{S}(V,n)_0\oplus \widetilde{\mathrm{W}}_1$.

证明 1) 由定理 1.7 知, 存在李超代数的嵌入 $\varphi: L\to \mathrm{W}(V,n)$, 使得 $\varphi(L_{-1})=\mathrm{W}(V,n)_{-1}$. 所以我们可设 L 是 $\mathrm{W}(V,n)$ 的 $\mathbb{Z}$- 阶化子代数, 并且 $L_{-1}=\mathrm{W}(V,n)_{-1}$. 由引理 2.6 的 1) 可推得 $L_1=\widetilde{\mathrm{W}}_1$, $\mathrm{S}(V,n)_1$ 或 $\mathrm{W}(V,n)_1$. 若 $L_1=\mathrm{S}(V,n)_1$ 或 $\mathrm{W}(V,n)_1$, 则可推得 $L_2\neq 0$. 此与定理的假设矛盾, 因此 $L_1=\widetilde{\mathrm{W}}_1$. 由定理 2.3 知 $[\widetilde{\mathrm{W}}_1,\widetilde{\mathrm{W}}_1]=0$. 显然 $[L_3,L_{-1}]\subseteq L_2=0$. 因为 L 是可迁的, 故 $L_3=0$. 对 i 用归纳法可知 $L_i=0$, $\forall i\geq 2$, 所以 $L\cong \mathrm{W}(V,n)_{-1}\oplus \mathrm{W}(V,n)_0\oplus \widetilde{\mathrm{W}}_1$.

相仿地, 利用定理 1.7 与引理 2.6 的 2), 则可证得本定理的 2). □

下面我们用旗的方法表出有限维 Cartan 型模李超代数.

设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上维数为 m 的线性空间. 称 V 的如下的子空间链

$$\mathcal{F}: V=V_0\supseteq V_1\supseteq\cdots\supseteq V_{q-1}\supset V_q=0$$

为 V 的一个旗, 其中 $V_{q-1}\neq 0$. 设 $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ 是由

$$\{x^{(p^i)}\mid x\in V_i,\ i=0,1,\cdots,q-1\}$$

生成的 $\mathcal{U}(V)$ 的子代数. 若 $x\in V_i\backslash V_{i+1}$, 则 $0\neq x^{(k)}\in\mathcal{U}(\mathcal{F})$, 其中 $0\leq k<p^{i+1}$, 并且 $x^{(p^{i+1})}=0$. 我们称 $i+1$ 为 x 的高度, 记为 $h(x)=i+1$. 将 V_{q-1} 的基底依次扩充为 $V_{q-1},V_{q-3},\cdots,V_0=V$ 的基底 $\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$, 称它为相应与旗 $\mathcal{F}$ 的基底. 设 $t_i=h(x_i)$, 其中 $i\in Y_0=\{1,\cdots,m\}$. 令

$$A(\mathcal{F})=\{\alpha\in\mathbb{N}_0^m\mid 0\leq\alpha_i<p^{t_i},\ i\in Y_0\}.$$

仍记 $x_1^{(\alpha_1)}x_2^{(\alpha_2)}\cdots x_m^{(\alpha_m)}$ 为 $x^{(\alpha)}$, 于是 $\{x^{(\alpha)}\mid\alpha\in A(\mathcal{F})\}$ 构成了 $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ 的一个基底. 设 $x_{m+1},\cdots,x_s$ 是外代数 $\Lambda(n)$ 的基底. 令

$$\Lambda(\mathcal{F},n)=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{f\xi\mid f\in\mathcal{U}(\mathcal{F}),\ \xi\in\Lambda(n)\},$$

则 $\Lambda(\mathcal{F},n)$ 是 $\Lambda(V,n)$ 的有限维的 $\mathbb{Z}$- 阶化子代数, 并且 $\{x^{(\alpha)}x^u\mid\alpha\in A(\mathcal{F}),\ u\in B(n)\}$ 是 $\Lambda(\mathcal{F},n)$ 的一个基底. 令

$$\mathrm{W}(\mathcal{F},n)=\left\{\sum_{i=1}^{s}f_i\mathrm{D}_i\ \middle|\ f_i\in\Lambda(\mathcal{F},n)\right\},$$

$$\overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F},n)=\overline{\mathrm{S}}(V,n)\cap\mathrm{W}(\mathcal{F},n),$$

$$\mathrm{S}(\mathcal{F},n)=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\left\{\mathrm{D}_{ij}(f)\ \middle|\ f\in\Lambda(\mathcal{F},n),\quad i,j\in Y\right\},$$

其中 D_i 与 D_{ij} 分别如第一章 (2.3) 式与第二章 (1.1) 式所定义. 显然, 如上取定相应于旗 $\mathcal{F}$ 的基底后, $\Lambda(\mathcal{F},n)$ 就是结合超代数 $\Lambda(m,n,\underline{t})$. 所以 $\mathrm{W}(\mathcal{F},n)$, $\overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F},n)$, 与 $\mathrm{S}(\mathcal{F},n)$ 就分别为 $\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$, $\overline{\mathrm{S}}(m,n,\underline{t})$, 与 $\mathrm{S}(m,n,\underline{t})$. 以下总设 $x_{m+1},\cdots,x_s$ 为外代数 $\Lambda(n)$ 的基底. 令

$$X'(\mathcal{F},n)_l := \sum_{i=1}^{l-1}[X(\mathcal{F},n)_i, X(\mathcal{F},n)_{l-i}], \quad l>1,$$

其中 $X = \mathrm{W}$ 或 S.

引理 2.8 设 $\mathcal{F}: V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq V_{q-1} \supset V_q = 0$ 是 V 的一个旗, $x_1,\cdots,x_m$ 为 V 的相应于旗 $\mathcal{F}$ 的基底.

1) 设 $x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_i \in \mathrm{W}(\mathcal{F},n)_l$, $l>1$. 若 $|u|\geq 1$, 则 $x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_i \in \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l$.

2) 若 $l \neq p^t-1$, $\forall t\in\mathbb{N}$, 则 $\mathrm{W}(\mathcal{F},n)_l = \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l$.

3) 设 $l = p^t-1$, $\widetilde{V}_t = \{x_1,\cdots,x_m\}\cap V_t$. 则

$$\begin{aligned}\mathrm{W}(\mathcal{F},n)_l &= \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l + \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x_j^{(p^t)}\mathrm{D}_i \mid x_j \in \widetilde{V}_t,\ i\in Y\}\\ &= \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l + \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(p^t)}\mathrm{D}_i \mid x \in V_t,\ i\in Y\}\end{aligned}$$

(若 $t>q$, 约定 $V_{q+1}=V_{q+2}=\cdots=V_r=0$).

证明 我们分以下两种情形证明 1).

(a) $i\in Y_0$. 若 $|u|>1$, 取 $k\in\{u\}$, 则有

$$[x^{(\alpha)}x_k\mathrm{D}_k, x^u\mathrm{D}_i] = \mathrm{sgn}(\langle k\rangle, u-\langle k\rangle)x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_i \in \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l.$$

若 $|u|=1$, 则可设 $x^u = x_k$, $k\in Y_1$. 当 $\alpha_i \not\equiv 1 \pmod p$ 时, 则有

$$[x^{(\alpha)}\mathrm{D}_i, x_ix_k\mathrm{D}_i] = (1-\alpha_i)x^{(\alpha)}x_k\mathrm{D}_i.$$

所以 $x^{(\alpha)}x_k\mathrm{D}_i \in \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l$. 当 $\alpha\equiv 1 \pmod p$ 时, 则

$$[x^{(\alpha-\varepsilon_i)}x_k\mathrm{D}_k, x_ix_k\mathrm{D}_i] = x^{(\alpha)}x_k\mathrm{D}_i \in \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l.$$

(b) $i\in Y_1$. 若 $|\alpha|>1$, 取 $j\in Y_0$, 于是

$$[x^{(\alpha)}\mathrm{D}_j, x_jx^u\mathrm{D}_i] = x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_i \in \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l.$$

若 $|\alpha|=1$, 则可设 $x^{(\alpha)} = x_j$, $j\in Y_0$. 当 $i\notin\{u\}$ 时,

$$[x^u\mathrm{D}_j, x^{(2\varepsilon_j)}\mathrm{D}_i] = x_jx^u\mathrm{D}_i \in \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l.$$

当 $i\in\{u\}$ 时,

$$[x_jx^{u-\langle i\rangle}\mathrm{D}_j, x_jx_i\mathrm{D}_i] = \mathrm{sgn}(u-\langle i\rangle,\langle i\rangle)x_jx^u\mathrm{D}_i \in \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l.$$

若 $|\alpha|=0$, 当 $i\in\{u\}$ 时, 取 $j\in Y_0$, 于是

$$[x^{u-\langle i\rangle}\mathrm{D}_j, x_jx_i\mathrm{D}_i]=\mathrm{sgn}(u-\langle i\rangle,\langle i\rangle)x^u\mathrm{D}_i\in \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l;$$

当 $i\notin\{u\}$ 时, 取 $k\in\{u\}$, 则

$$[x^{u-\langle k\rangle}\mathrm{D}_i, x_kx_i\mathrm{D}_i]=\mathrm{sgn}(u-\langle k\rangle,\langle k\rangle)x^u\mathrm{D}_i\in \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l.$$

2) 设 $l\neq p^t-1$, $\forall t\in\mathbb{N}$. 令 $x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_i\in \mathrm{W}(\mathcal{F},n)_l$. 若 $|u|\geq 1$, 由 1) 知 $x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_i\in \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l$. 下面证明 $|u|=0$ 时, $x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_i\in \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l$, 即 $x^{(\alpha)}\mathrm{D}_i\in \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l$. 我们分以下情形讨论.

(i) $i\in Y_0$, $\alpha_i=0$. 若存在 $j\in Y_0\backslash\{i\}$, 使得 $\alpha_j\not\equiv 0 \pmod p$, 则 $[x^{(\alpha-\varepsilon_j)}\mathrm{D}_j, x^{(2\varepsilon_j)}\mathrm{D}_i]=\alpha_jx^{(\alpha)}\mathrm{D}_i$. 所以 $x^{(\alpha)}\mathrm{D}_i\in \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l$. 设对任意 $j\in Y_0\backslash\{i\}$, 均有 $\alpha_j\equiv 0 \pmod p$. 若存在 $j,k\in Y_0\backslash\{i\}$, 使得 $\alpha_j\neq 0$, $\alpha_k\neq 0$, 则

$$[x^{(\alpha-\alpha_j\varepsilon_j)}\mathrm{D}_j, x^{((\alpha_j+1)\varepsilon_j)}\mathrm{D}_i]=x^{(\alpha)}\mathrm{D}_i\in \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l.$$

若只有一个 $j\in Y_0\backslash\{i\}$, 使得 $\alpha_j\neq 0$, 设 $\alpha_j=\sum_{h=1}^r a_hp^h$ 是 α_j 的 P-Adic 形式. 因为 $|\alpha|\neq p^t$, $\forall t\in\mathbb{N}$, 所以 $\binom{\alpha_j}{p^r}\not\equiv 0 \pmod p$. 取 $k\in Y_1$, 则有

$$[x^{(\alpha-p^r\varepsilon_j)}\mathrm{D}_k, x^{(p^r\varepsilon_j)}x_k\mathrm{D}_i]=\binom{\alpha_j}{p^r}x^{(\alpha)}\mathrm{D}_i,$$

故 $x^{(\alpha)}\mathrm{D}_i\in \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l$.

(ii) $i\in Y_0$, $\alpha_i\neq 0$. 若 $|\alpha-\alpha_i\varepsilon_i|\geq 2$, 取 $k\in Y_1$, 则

$$[x^{(\alpha-\alpha_i\varepsilon_i)}\mathrm{D}_k, x^{(\alpha_i\varepsilon_i)}x_k\mathrm{D}_i]=x^{(\alpha)}\mathrm{D}_i\in \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l.$$

若 $|\alpha-\alpha_i\varepsilon_i|=1$, 由于 $|\alpha|\geq 3$, 应有 $\alpha_i\geq 2$. 设 $k\in Y_1$, 则

$$[x^{(\alpha_i\varepsilon_i)}\mathrm{D}_k, x^{(\alpha-\alpha_i\varepsilon_i)}x_k\mathrm{D}_i]=x^{(\alpha)}\mathrm{D}_i\in \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l.$$

设 $|\alpha-\alpha_i\varepsilon_i|=0$, 即 $\alpha=\alpha_i\varepsilon_i$. 若 $\alpha\not\equiv 0 \pmod p$, 取 $k\in Y_1$, $l\in Y\backslash\{k,i\}$. 由计算知

$$[x^{((\alpha_i-1)\varepsilon_i)}\mathrm{D}_k, x_ix_k\mathrm{D}_i]-(\alpha_i-1)[x^{((\alpha_i-1)\varepsilon_i)}\mathrm{D}_l, x_lx_k\mathrm{D}_k]=\alpha_ix^{(\alpha)}\mathrm{D}_i,$$

故 $x^{(\alpha)}\mathrm{D}_i\in \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l$. 若 $\alpha_i\equiv 0 \pmod p$, 可设 $\alpha_i=\sum_{h=1}^r a_hp^h$ 为 α_i 的 p-adic 形式, 则 $\binom{\alpha_i}{p^r}\not\equiv 0 \pmod p$, $\binom{\alpha_i}{p^r-1}\equiv 0 \pmod p$. 因而

$$[x^{((\alpha_i-p^r+1)\varepsilon_i)}\mathrm{D}_i, x^{(p^r\varepsilon_i)}\mathrm{D}_i]=\left[\binom{\alpha_i}{p^r-1}-\binom{\alpha_i}{p^r}\right]x^{(\alpha)}\mathrm{D}_i.$$

所以 $x^{(\alpha)}\mathrm{D}_i\in \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l$.

综上, 我们证明了 $\mathrm{W}(\mathcal{F},n)_l\subseteq \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l$. 显然 $\mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l\subseteq \mathrm{W}(\mathcal{F},n)_l$, 所以 $\mathrm{W}(\mathcal{F},n)_l=\mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l$.

3) 设 $x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_i$ 是 $\mathrm{W}(\mathcal{F},n)_l$ 的任一基元素. 若 $|u|\geq 1$, 由 1) 知 $x^{(\alpha)}x^u\mathrm{D}_i\in \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l$. 设 $|u|=0$. 由 $l=p^t-1$ 知 $|\alpha|=p^t$. 若 $\alpha\neq p^t\varepsilon_j, \forall j\in Y_0$, 仿 2) 可证得 $x^{(\alpha)}\mathrm{D}_i\in \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l$. 所以

$$\begin{aligned}\mathrm{W}(\mathcal{F},n)_l &= \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l+\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(p^t\varepsilon_j)}\mathrm{D}_i \mid j\in Y_0,\ i\in Y\}\\ &= \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l+\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x_j^{(p^t)}\mathrm{D}_i \mid j\in Y_0,\ i\in Y\}\\ &= \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l+\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x_j^{(p^t)}\mathrm{D}_i \mid x_j\in V_t,\ i\in Y\}.\end{aligned}$$

设 $\widetilde{V}_t=\{x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_k}\}$, 则 $\widetilde{V}_t$ 是 V_t 的一个基底. 任取 $x\in V_t$, 可设 $x=\sum_{r=1}^k a_r x_{j_r}$, 其中 $a_r\in\mathbb{F}$. 由本节开始的除幂代数的定义可推得

$$x^{(p^t)}=\sum_{r=1}^{k}a_r^{p^t}x_{j_r}^{(p^t)}+y,$$

其中 y 是形如 $ax_{j_1}^{(l_1)}x_{j_2}^{(l_2)}\cdots x_{j_k}^{(l_k)}$ 的元素之和,$a\in\mathbb{F}$, $l_i<p^t$, $i=1,\cdots,k$. 于是

$$ax_{j_1}^{(l_1)}x_{j_2}^{(l_2)}\cdots x_{j_k}^{(l_k)}\mathrm{D}_i=ax^{(l_1\varepsilon_1+\cdots+l_k\varepsilon_k)}\mathrm{D}_i\in \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l,$$

所以 $y\mathrm{D}_i\in \mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l$. 因为 $x^{(p^t)}\mathrm{D}_i=y\mathrm{D}_i+\sum_{r=1}^k a_r^{p^t}x_{j_r}^{(p^t)}\mathrm{D}_i$, 所以

$$\mathrm{W}(\mathcal{F},n)_l=\mathrm{W}'(\mathcal{F},n)_l+\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(p^t)}\mathrm{D}_i \mid x\in V_t,\ i\in Y\}. \qquad \square$$

引理 2.9 *设 $\mathcal{F}: V=V_0\supseteq V_1\supseteq\cdots\supseteq V_{q-1}\supset V_q=0$ 是 V 的一个旗, $\{x_1,\cdots,x_m\}$ 是 V 的相应于旗 $\mathcal{F}$ 的基底. 令 $\widetilde{V}_t=\{x_1,\cdots,x_m\}\cap V_t$. 设 $\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^u)\in \mathrm{S}(\mathcal{F},n)_l$, 其中 $l>1$. 若不存在 $t\in\mathbb{N}$, 使得 $x^{(\alpha)}x^u\in\{x_r^{(p^t)}x_k \mid x_r\in\widetilde{V}_t,\ k\in Y\}$, 则 $\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^u)\in \mathrm{S}'(\mathcal{F},n)_l$.*

证明 设 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\in\mathbb{N}_0^m$, 令 $\mathbb{N}(\alpha)=\{i\in Y_0\mid\alpha_i\neq 0\}$. 约定 $\lambda=1$ 或 -1.

(i) 设 $\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^u)\in \mathrm{S}(\mathcal{F},n)_l$, $l>1$. 我们证明当 $|u|\geq 2$ 时, $\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^u)\in \mathrm{S}'(\mathcal{F},n)_l$.

若 $|\alpha|=1$, 则 $|u|\geq 3$. 不妨设 $i\in\mathbb{N}(\alpha)\cup\{u\}$ (若 $j\in\mathbb{N}(\alpha)\cup\{u\}$, 证明是相仿的). 当 $i\in\mathbb{N}(\alpha)$ 时, $x^{(\alpha)}=x_i$. 设 $k\in\{u\}$, $k\neq j$. 利用第二章引理 3.10 的 3), 可算得

$$\mathrm{D}_{ij}(x_ix^u)=\lambda[\mathrm{D}_{ik}(x^u),\mathrm{D}_{ij}(x^{(2\varepsilon_i)}x_k)]\in \mathrm{S}'(\mathcal{F},n)_l.$$

当 $i\in\{u\}$ 时, 设 $\alpha=\varepsilon_r$, $r\in Y_0$. 若 $i=j$, 取 $k\in\{u\}$, $h\in\{u\}\backslash\{i,k\}$, 则

$$\mathrm{D}_{ii}(x_rx^u)=2^{-1}\lambda[\mathrm{D}_{ii}(x_rx^{u-\langle k\rangle}),\mathrm{D}_{hi}(x_hx_kx_i)]\in \mathrm{S}'(\mathcal{F},n)_l.$$

设 $i\neq j$. 若 $j\neq r$, 则

$$\mathrm{D}_{ij}(x_rx^u)=\lambda[\mathrm{D}_{ir}(x_rx^{u-\langle i\rangle}),\mathrm{D}_{jr}(x^{(2\varepsilon_r)}x_i)]\in \mathrm{S}'(\mathcal{F},n)_l.$$

若 $j=r$, 取 $k\in\{u\}\backslash\{i\}$, $h\in Y\backslash\{i,j,k\}$, 则

$$\mathrm{D}_{ij}(x_rx^u)=\lambda[\mathrm{D}_{ih}(x_rx_hx_k),\mathrm{D}_{rk}(x^u)]\in \mathrm{S}'(\mathcal{F},n)_l.$$

设 $|\alpha| > 1$. 不妨设 $i \in \mathbb{N}(\alpha) \cup \{u\}$.

(a) $i \in \mathbb{N}(\alpha)$ 的情形. 若 $j \in Y \backslash \mathbb{N}(\alpha)$, 取 $k \in Y_1$, $k \neq j$. 令 $r \in Y_0 \backslash \{i\}$. 则

$$\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^u) = \lambda[\mathrm{D}_{ir}(x_r x^u), \mathrm{D}_{jk}(x^{(\alpha)}x_k)] \in \mathrm{S}'(\mathcal{F}, n)_l.$$

若 $j \in \mathbb{N}(\alpha)$ 并且 $\alpha_i \not\equiv 0 \pmod p$, 取 $k \in \{u\}$, 则

$$\lambda\alpha_i \mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^u) = [\mathrm{D}_{ik}(x^{(\alpha)}x_k), \mathrm{D}_{ji}(x_i x^u)] \in \mathrm{S}'(\mathcal{F}, n)_l.$$

所以 $\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^u) \in \mathrm{S}'(\mathcal{F}, n)_l$. 若 $j \in \mathbb{N}(\alpha)$, $\alpha_i \equiv 0 \pmod p$, 取 $k \in \{u\}$, $r \in Y_1 \backslash \{k\}$, 则

$$\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^u) = \lambda[\mathrm{D}_{jk}(x^{(\alpha_i\varepsilon_i)}x^u), \mathrm{D}_{ir}(x^{(\alpha-\alpha_i\varepsilon_i)}x_r x_k)] \in \mathrm{S}'(\mathcal{F}, n)_l.$$

(b) $i \in \{u\}$ 的情形. 若 $j \notin \{u\}$, 取 $k \in Y_1 \backslash \{i\}$, $r \in Y_0$, 则

$$\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^u) = \lambda[\mathrm{D}_{ik}(x^{(\alpha)}x_k), \mathrm{D}_{jr}(x_r x^u)] \in \mathrm{S}'(\mathcal{F}, n)_l.$$

若 $j \in \{u\}$, 当 $|u| \leq 3$ 时, 取 $r \in Y_0$, $k \in Y_1 \backslash \{i, j\}$, 则有

$$\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^u) = \lambda[\mathrm{D}_{ir}(x_r x^{u-\langle i\rangle}), \mathrm{D}_{ik}(x^{(\alpha)}x_i x_k)] \in \mathrm{S}'(\mathcal{F}, n)_l.$$

当 $|u| = 2$ 时, 因为 $i, j \in \{u\}$, 故可设 $x^u = x_i x_j$. 如果 $|\mathbb{N}(\alpha)| \neq m$, 则取 $h \in Y_0 \backslash \mathbb{N}(\alpha)$, 于是

$$\lambda \mathrm{D}_{ih}(x^{(\alpha)}x_h x_i) = [\mathrm{D}_{ih}(x^{(2\varepsilon_h)}x_i), \mathrm{D}_{ih}(x^{(\alpha)}x_i)] \in \mathrm{S}'(\mathcal{F}, n)_l.$$

取 $k \in Y_1 \backslash \{i\}$, 则

$$[\mathrm{D}_{ik}(x^{(\alpha)}x_k), \mathrm{D}_{jh}(x_i x_j x_h)] = \lambda \mathrm{D}_{ih}(x^{(\alpha)}x_h x_i) + \mu \mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x_i x_j),$$

这里 $\mu = 1$ 或 -1. 因为 $\lambda \mathrm{D}_{ih}(x^{(\alpha)}x_h x_i) \in \mathrm{S}'(\mathcal{F}, n)_l$, 所以 $\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x^u) = \mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x_i x_j) \in \mathrm{S}'(\mathcal{F}, n)_l$. 如果 $|\mathbb{N}(\alpha)| = m$, 取 $r \in Y_0$, $t \in Y_1 \backslash \{i, j\}$, $h \in Y_0 \backslash \{r\}$, 则有

$$\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x_i x_j) = \lambda[\mathrm{D}_{it}(x^{(\alpha-\alpha_r\varepsilon_r)}x_j x_t), \mathrm{D}_{jh}(x^{(\alpha_r\varepsilon_r)}x_i x_h)] \in \mathrm{S}'(\mathcal{F}, n)_l.$$

(ii) 设 $\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x_k) \in \mathrm{S}(\mathcal{F}, n)_l$, 其中 $k \in Y$, 并且不存在 $t \in \mathbb{N}$, 使得 $x^{(\alpha)} \in \{x_r^{(p^t)} \mid x_r \in \widetilde{V}_t\}$. 下面证明 $\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x_k) \in \mathrm{S}'(\mathcal{F}, n)_l$.

(a) $i \in \mathbb{N}(\alpha)$ 的情形 (若 $j \in \mathbb{N}(\alpha)$, 证明是相仿的). 如果 $|\mathbb{N}(\alpha)| > 1$ 并且 $\alpha_i \geq 2$, 取 $h \in Y \backslash \{i, j\}$, $r \in Y_1$, $r \neq k$, 则有

$$\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x_k) = \lambda[\mathrm{D}_{ir}(x^{(\alpha-\alpha_i\varepsilon_i)}x_k x_r), \mathrm{D}_{jh}(x^{(\alpha_i\varepsilon_i)}x_h)] \in \mathrm{S}'(\mathcal{F}, n)_l.$$

如果 $|\mathbb{N}(\alpha)| > 1$, 并且 $\alpha_i = 1$, 取 $r \in Y_1$, $h \in Y \backslash \{i, j, k\}$, 则有

$$\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x_k) = \lambda[\mathrm{D}_{ir}(x^{(\alpha-\varepsilon_i)}x_r), \mathrm{D}_{jh}(x_i x_k x_h)] \in \mathrm{S}'(\mathcal{F}, n)_l.$$

如果 $|\mathbb{N}(\alpha)| = 1$, 则 $\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x_k) = \mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha_i\varepsilon_i)}x_k)$. 我们分以下两种情况讨论.

(a)-① 设 $\alpha_i \neq 0 \pmod p$. 若 $i,k \in Y_0$ 或者 $j,k \in Y_1$, 则有

$$[\mathrm{D}_{ij}(x_ix_kx_j), \mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha_i\varepsilon_i)})] = \lambda\alpha_i\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha_i\varepsilon_i)}x_k).$$

于是 $\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x_k) \in \mathrm{S}'(\mathcal{F},n)_l$. 若 $j \in Y_0$, $k \in Y_1$, 则

$$[\mathrm{D}_{ji}(x^{((\alpha_i-1)\varepsilon_i)}x_j), \mathrm{D}_{ji}(x^{(2\varepsilon_i)}x_k)] = \lambda\alpha_i\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha_i\varepsilon_i)}x_k),$$

故 $\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x_k) \in \mathrm{S}'(\mathcal{F},n)_l$. 若 $j \in Y_1$, $k \in Y_0$, 取 $h,q \in Y\backslash\{k,j\}$, 则

$$\mathrm{D}_{kj}(x^{((\alpha_i-2)\varepsilon_i)}x^{(2\varepsilon_k)}) = [\mathrm{D}_{kh}(x^{((\alpha_i-2)\varepsilon_i)}x_h), \mathrm{D}_{qj}(x^{(2\varepsilon_k)}x_q)] \in \mathrm{S}'(\mathcal{F},n)_l,$$

$$[\mathrm{D}_{ki}(x^{((\alpha_i-1)\varepsilon_i)}x_k), \mathrm{D}_{kj}(x^{(2\varepsilon_k)}x_i)]$$
$$= \lambda\alpha_i\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha_i\varepsilon_i)}x_k) + \mathrm{D}_{kj}(x^{((\alpha_i-2)\varepsilon_i)}x^{(2\varepsilon_k)}) \in \mathrm{S}'(\mathcal{F},n)_l.$$

由以上两式可推得 $\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha_i\varepsilon_i)}x_k) = \mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x_k) \in \mathrm{S}'(\mathcal{F},n)_l$.

(a)-② 设 $\alpha_i \equiv 0 \pmod p$. 令 $\alpha_i = \sum_{l=1}^{v} k_lp^l$ 为 α_i 的 p-adic 形式, 其中 $k_v \neq 0$. 由已知 $x^{(\alpha)} \neq x_i^{(p^v)}$, 所以 $\alpha_i - p^v > 0$ 并且 $\binom{\alpha_i}{p^v} \not\equiv 0 \pmod p$. 取 $r \in Y\backslash\{i,j,k\}$, 则有

$$\lambda\binom{\alpha_i}{p^v}\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x_k) = [\mathrm{D}_{ij}(x^{((p^v+1)\varepsilon_i)}), \mathrm{D}_{ir}(x^{((\alpha_i-p^v)\varepsilon_i)}x_kx_r)] \in \mathrm{S}'(\mathcal{F},n)_l.$$

所以 $\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x_k) \in \mathrm{S}'(\mathcal{F},n)_l$.

(b) 若 $i,j \notin \mathbb{N}(\alpha)$, 则可设 $k=j$ 或者 $k=i$ (否则 $\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x_k)=0$). 不妨设 $k=j$. 分别考虑 $|\mathbb{N}(\alpha)|>1$ 与 $\mathbb{N}(\alpha)=1$ 的情形, 相仿于 (a) 可证得 $\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x_j) \in \mathrm{S}'(\mathcal{F},n)_l$.

(iii) 设 $\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}) \in \mathrm{S}(\mathcal{F},n)_l$, 并且不存在 $t \in \mathbb{N}$, 使得 $x^{(\alpha)} \in \{x_r^{(p^t)} \mid x_r \in \widetilde{V}_t,\ k \in Y\}$, 我们证明 $\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}) \in \mathrm{S}'(\mathcal{F},n)_l$.

若有某个 $\alpha_k \neq 0 \pmod p$, 则 $\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}) = \alpha_k\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}x_k)$. 由 (ii) 知, 此时 $\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}) \in \mathrm{S}'(\mathcal{F},n)_l$.

设 $\alpha_k \equiv 0 \pmod p$, $\forall k \in Y_0$. 若 $\mathbb{N}(\alpha)=1$, 则可设 $\alpha_i \neq 0$ 或者 $\alpha_j \neq 0$ (否则 $\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)})=0$). 不妨设 $\alpha_j \neq 0$. 若 $l=p^t-2$, 其中 $t \in \mathbb{N}$, 取 $k \in Y_1$, $k \neq j$, 则

$$\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}) = \mathrm{D}_{ij}(x^{(p^t\varepsilon_j)}) = -\mathrm{D}_{ik}(x^{((p^t-1)\varepsilon_j)}x_k)$$
$$= \lambda[\mathrm{D}_{ik}(x_jx_ix_k), \mathrm{D}_{ik}(x^{((p^t-2)\varepsilon_j)}x_k)] \in \mathrm{S}'(\mathcal{F},n)_l.$$

若 $l \neq p^t-2$, 则 $l+2 \neq p^t$. 若 $l+2 \neq 0 \pmod p$, 由 (ii) 知

$$\mathrm{D}_{ij}(x^{((l+2)\varepsilon_j)}x_j) = (l+2)\mathrm{D}_{ij}(x^{((l+1)\varepsilon_j)}) \in \mathrm{S}'(\mathcal{F},n)_l.$$

若 $l+2 \equiv 0 \pmod p$, 设 $l+2 = \sum_{t=1}^{v} a_tp^t$ 是 $l+2$ 的 p-adic 形式. 则 $\binom{l+2}{p^v} \not\equiv 0 \pmod p$, 并且

$$\binom{l+2}{p^v}\mathrm{D}_{ij}(x^{((l+2)\varepsilon_j)}) = [\mathrm{D}_{ij}(x^{((l+2-p^v)\varepsilon_j)}), \mathrm{D}_{ij}(x^{(p^v\varepsilon_j)}x_i)] \in \mathrm{S}'(\mathcal{F},n)_l.$$

于是 $\mathrm{D}_{ij}(x^{((l+2)\varepsilon_j)}) \in \mathrm{S}'(\mathcal{F},n)_l$.

若 $|\mathbb{N}(\alpha)| > 1$, 可设 $i \in \mathbb{N}(\alpha)$. 取 $k \in Y_1$, 由 $\alpha_i \geq p$ 以及 $|\alpha - \alpha_i\varepsilon_i| \geq p$ 知

$$\mathrm{D}_{ij}(x^{(\alpha)}) = \lambda[\mathrm{D}_{ik}(x^{(\alpha-\alpha_i\varepsilon_i)}x_k), \mathrm{D}_{kj}(x^{(\alpha_i\varepsilon_i)}x_k)] \in \mathrm{S}'(\mathcal{F},n)_l. \qquad \square$$

推论 2.10　*旗 $\mathcal{F}$ 与 $\widetilde{V}_t$ 的定义如引理 2.9. 下面的命题成立:*

1) 若不存在 $t \in \mathbb{N}$, 使得 $l = p^t - 1$, 则 $\mathrm{S}(\mathcal{F},n)_l = \mathrm{S}'(\mathcal{F},n)_l$.

2) 若 $l = p^t - 1$, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{S}(\mathcal{F},n)_l &= \mathrm{S}'(\mathcal{F},n)_l + \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D}_{ij}(x_r^{(p^t)}x_k) \mid x_r \in \widetilde{V}_t,\ i,j,k \in Y\} \\ &= \mathrm{S}'(\mathcal{F},n)_l + \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D}_{ij}(x^{(p^t)}x_k) \mid x \in V_t,\ i,j,k \in Y\}.\end{aligned}$$

证明　显然 $\mathrm{S}'(\mathcal{F},n)_l \subseteq \mathrm{S}(\mathcal{F},n)_l$. 应用引理 2.9 可得本推论 (2) 中后一个等号的证明相仿于引理 2.8 的 3)). $\square$

设 $\mathcal{F}$ 是 V 的一个旗. 令

$$X(\mathcal{F},n)_l^{-1} = \{y \in \mathrm{W}(V,n)_l \mid [y, X(V,n)_{-1}] \subseteq X(\mathcal{F},n)_{l-1}\},$$

其中 $X = \mathrm{W}$ 或者 $\overline{\mathrm{S}}$.

引理 2.11　*设 $\mathcal{F}: V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq V_{q-1} \supset V_q = 0$ 是 V 的一个旗, $X = \mathrm{W}$ 或者 $\overline{\mathrm{S}}$.*

1) 若 $l \neq p^t - 1$, $\forall t \in \mathbb{N}$, 则 $X(\mathcal{F},n)_l^{-1} = X(\mathcal{F},n)_l$.

2) 若 $l = p^t - 1$, 则 $X(\mathcal{F},n)_l^{-1} = X(\mathcal{F}_1,n)_l$, 其中 $\mathcal{F}_1: V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq V_{t-1} = V_t' \supseteq V_{t+1}' = 0$ 是通过旗 $\mathcal{F}$ 构作的旗(若 $t > q$, 则令 $V_{q+1} = \cdots = V_{t-1} = V_t' = V_{t+1}' = 0$).

证明　我们仅证明本引理的 2). 1) 的证明与 2) 相仿, 并且稍有简单. 易见, 若 $l = p^t - 1$, 则 $\Lambda(\mathcal{F},n)_l = \Lambda(\mathcal{F}_1,n)_l$.

(i) $X = \mathrm{W}$ 的情形.

(a) 令 y 是 $\mathrm{W}(\mathcal{F},n)_l^{-1}$ 的一个元素. 设 $y = \sum_{i=1}^s f_i\mathrm{D}_i$, 其中 $f_i \in \Lambda(V,n)$. 因为 $[y, \mathrm{W}(V,n)_{-1}] \subseteq \mathrm{W}(\mathcal{F},n)_{l-1}$, 所以

$$\mathrm{D}_j(f_i) \in \Lambda(\mathcal{F},n), \qquad \forall i,j \in Y. \tag{2.11}$$

假设某个 $f_i \notin \Lambda(\mathcal{F}_1,n)$, 可设 $f_i = \sum_{\alpha,u} k_{\alpha u}x^{(\alpha)}x^u$, 其中 $0 \neq k_{\alpha u} \in \mathbb{F}$. 于是 f_i 的某项 $k_{\alpha u}x^{(\alpha)}x^u \notin \Lambda(\mathcal{F}_1,n)_{l+1}$. 若 $|u| > 0$, 取 $k \in \{u\}$, 则

$$\mathrm{D}_k(x^{(\alpha)}x^u) = \mathrm{sgn}(\langle k\rangle, u - \langle k\rangle)x^{(\alpha)}x^{u-\langle k\rangle} \notin \Lambda(\mathcal{F}_1,n)_l.$$

由 (2.11) 式可知 $\mathrm{D}_k(x^{(\alpha)}x^u) \in \Lambda(\mathcal{F},n)_l$, 此与 $\Lambda(\mathcal{F},n)_l = \Lambda(\mathcal{F}_1,n)_l$ 矛盾.

设 $|u| = 0$. 则 f_i 的某项为 $kx^{(\alpha)}$, 其中 $0 \neq k \in \mathbb{F}$, 并且 $x^{(\alpha)} \notin \Lambda(\mathcal{F}_1,n)_{l+1}$. 因为 $y \in \mathrm{W}(V,n)_l$, 所以 $|\alpha| = l + 1 = p^t$. 由 $x^{(\alpha)} \notin \Lambda(\mathcal{F}_1,n)$ 知, 存在 $j \in Y_0$ 使得 $x_j \in V_r \backslash V_{r+1}$ 并且 $\alpha_j \geq p^{r+1}$, 其中 $r < t - 1$. 若 $|\mathbb{N}(\alpha)| > 1$, 则可设 $\alpha_k \neq 0$, 这里 $k \neq j$. 于

是 $\mathrm{D}_k(x^{(\alpha)}) = x^{(\alpha-\varepsilon_k)} \notin \Lambda(\mathcal{F},n)$, 此与 (2.11) 式矛盾. 若 $|\mathbb{N}(\alpha)| = 1$, 可设 $\alpha = \alpha_j\varepsilon_j$. 那么 $\alpha_j = l+1 = p^t$. 因为 $t > r+1$, 所以

$$\mathrm{D}_j(x^{(\alpha)}) = x^{((p^t-1)\varepsilon_j)} \notin \Lambda(\mathcal{F},n),$$

也与 (2.11) 式矛盾. 这就证明了 $f_i \in \Lambda(\mathcal{F}_1,n)$, $\forall i \in Y$. 于是 $y \in \mathrm{W}(\mathcal{F}_1,n)_l$. 因此 $\mathrm{W}(\mathcal{F},n)_l^{-1} \subseteq \mathrm{W}(\mathcal{F}_1,n)_l$.

(b) 设 $y = \sum_{i=1}^s f_i\mathrm{D}_i \in \mathrm{W}(\mathcal{F}_1,n)_l$. 我们证明 $y \in \mathrm{W}(\mathcal{F},n)_l^{-1}$.

设 $f_i = \sum_{\alpha,u} k_{\alpha u}x^{(\alpha)}x^u$, 其中 $0 \neq k_{\alpha u} \in \mathbb{F}$. 则只需证明 $\mathrm{D}_j(x^{(\alpha)}x^u) \in \Lambda(\mathcal{F},n)_l$, $\forall j \in Y$, 这里 $k_{\alpha u}x^{(\alpha)}x^u$ 是 f_i 的任一非零项.

因为 $y \in \mathrm{W}(\mathcal{F}_1,n)_l$, 所以 $x^{(\alpha)}x^u \in \Lambda(\mathcal{F}_1,n)_{l+1}$. 若 $|u| \geq 1$, 则 $|\alpha| < l+1 = p^t$, 因此 $x^{(\alpha)}x^u \in \Lambda(\mathcal{F},n)_{l+1}$. 于是 $\mathrm{D}_j(x^{(\alpha)}x^u) \in \Lambda(\mathcal{F},n)_l$, $\forall j \in Y$. 若 $|u| = 0$, 当 $|\mathbb{N}(\alpha)| > 1$ 时, $x^{(\alpha)} \in \Lambda(\mathcal{F},n)_{l+1}$, 所以 $\mathrm{D}_j(x^{(\alpha)}) \in \Lambda(\mathcal{F},n)_l$. 当 $|\mathbb{N}(\alpha)| = 1$ 时, 可设 $\alpha = p^t\varepsilon_k$, 其中 $k \in Y_0$. 易见此时也有 $\mathrm{D}_j(x^{(\alpha)}) \in \Lambda(\mathcal{F},n)_l$, 所以 $\mathrm{W}(\mathcal{F}_1,n)_l \subseteq \mathrm{W}(\mathcal{F},n)_l^{-1}$.

由 (a) 与 (b) 知 $\mathrm{W}(\mathcal{F},n)_l^{-1} = \mathrm{W}(\mathcal{F}_1,n)_l$.

(ii) $X = \overline{\mathrm{S}}$ 的情形. 由 (i) 知

$$\overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F},n)_l^{-1} \subseteq \mathrm{W}(\mathcal{F},n)_l^{-1} = \mathrm{W}(\mathcal{F}_1,n)_l.$$

若 $y \in \overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F}_1,n)_l^{-1}$, 则 $y \in \mathrm{W}(V,n)_l$ 并且 $[\mathrm{D}_j,y] \in \overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F},n) \subseteq \overline{\mathrm{S}}(V,n)$, $\forall j \in Y$. 由引理 2.2 知

$$y \in \overline{\mathrm{S}}(V,n) \cap \mathrm{W}(\mathcal{F}_1,n)_l = \overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F}_1,n)_l,$$

所以 $\overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F},n)_l^{-1} \subseteq \overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F}_1,n)_l$.

设 $y = \sum_{i=1}^s f_i\mathrm{D}_i \in \overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F}_1,n)_l^{-1}$, 则 $[\mathrm{D}_j,y] \in \overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F}_1,n)_{l-1}$. 因此 $\mathrm{D}_j(f_i) \in \Lambda(\mathcal{F}_1,n)_l$, $\forall i,j \in Y$. 设 $\mathrm{D}_j(f_i) = \sum_{\alpha,u} k_{\alpha u}x^{(\alpha)}x^u$. 相仿于 (i) 中 (b) 的证明, 我们可证得 $\mathrm{D}_j(f_i) \in \Lambda(\mathcal{F},n)_l$. 于是

$$[\mathrm{D}_j,y] \in \mathrm{W}(\mathcal{F},n)_{l-1} \cap \overline{\mathrm{S}}(V,n) = \overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F},n)_{l-1}.$$

所以 $y \in \overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F},n)_l^{-1}$, 从而 $\overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F}_1,n)_l^{-1} \subseteq \overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F},n)_l^{-1}$. 那么

$$\overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F}_1,n)_l \subseteq \overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F}_1,n)_l^{-1} \subseteq \overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F},n)_l^{-1}.$$

故 $\overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F},n)_l^{-1} = \overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F}_1,n)$. □

定理 2.12 设 $\mathbb{F}$ 是特征数 $p > 3$ 的代数闭域. 令 $L = \bigoplus_{i\geq -1} L_i$ 是 $\mathbb{F}$ 上的有限维的 $\mathbb{Z}$- 阶化的单李超代数, 并且 $L_2 \neq 0$. 设 $V = L_{-1} \cap L_{\overline{0}}$, $\dim(L_{-1} \cap L_{\overline{1}}) = n$.

1) 若 L 的底部 $L_{-1} \oplus L_0$ 同构于李超代数 $L_{-1} \oplus \mathrm{pl}(L_{-1})$, 则存在 V 的旗 $\mathcal{F}$, 使得 $L \cong \mathrm{W}(\mathcal{F},n)$.

2) 若 L 的底部 $L_{-1} \oplus L_0$ 同构于李超代数 $L_{-1} \oplus \mathrm{spl}(L_{-1})$, 则存在 V 的旗 $\mathcal{F}$, 使得 $L \cong \mathrm{S}(\mathcal{F},n)$.

证明　因为 L 是单李超代数, 所以由第一章命题 1.15 知 L 是可迁的. 于是由定理 1.7 知, 存在李超代数的嵌入 $\varphi: L \to \mathrm{W}(V,n)$, 使得 $\varphi(L_{-1}) = \mathrm{W}(V,n)_{-1}$. 故可设 L 是 $\mathrm{W}(V,n)$ 的子代数, 并且 $L_{-1} = \mathrm{W}(V,n)_{-1} = \mathrm{S}(V,n)_{-1}$.

1) 由已知 $L_0 \cong \mathrm{pl}(L_{-1})$. 因为 $\mathrm{pl}(L_{-1}) \cong \mathrm{W}(V,n)_0$, 所以由引理 2.6 与 $L_2 \neq 0$ 知, L_0 与 L_1 只有以下两种情形: (i) $L_i \cong \mathrm{W}(V,n)_i$, $i = 0,1$. (ii) $L_0 \cong \mathrm{W}(V,n)_0$, $L_1 = \mathrm{S}(V,n)_1$.

(i) $L_i \cong \mathrm{W}(V,n)_i$ 的情形, $i = 0,1$. 不妨设 $L_i = \mathrm{W}(V,n)_i$, $i = 0,1$. 我们对 i 用归纳法证明存在 V 的旗 $\mathcal{F}$, 使得 $L_i = \mathrm{W}(\mathcal{F},n)_i$, $\forall i \geq 1$.

设 $\mathcal{F}_0 : V = V_0 \supset V_1 = 0$. 由 $\mathrm{char}\mathbb{F} = p > 3$ 知,

$$\mathrm{W}(\mathcal{F}_0,n)_i = \mathrm{W}(V,n)_i = L_i, \quad i = -1,0,1.$$

令 $l > 1$, 假设对任意 $i < l$, 存在 V 的旗

$$\mathcal{F} : V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq V_{h-1} \supset V_h = 0$$

使得 $L_i = \mathrm{W}(\mathcal{F},n)_i$. 显然存在 $t \in \mathbb{N}$, 使得 $p^{t-1} \leq l < p^t$. 若 $t \leq h$, 则令 $V_t = V_{t+1} = \cdots = V_h = 0$. 若 $t > h$, 则令 $V_h = V_{h+1} = \cdots = V_t = 0$. 于是我们得到旗

$$\mathcal{F}_1 : V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq V_{t-1} \supseteq V_t = 0.$$

易知 $\mathrm{W}(\mathcal{F}_1,n)_i = \mathrm{W}(\mathcal{F},n)_i$, $\forall i < l$.

(a) 若 $l \neq p^t - 1$, 由引理 2.8 的 2) 与归纳假设可推得

$$\mathrm{W}(\mathcal{F}_1,n)_l = \mathrm{W}'(\mathcal{F}_1,n)_l = \sum_{i=1}^{l-1}[L_i, L_{l-i}] \subseteq L_l.$$

令 $L_l^{-1} = \{y \in \mathrm{W}(V,n)_l \mid [y, L_{-1}] \subseteq L_{l-1}\}$. 由归纳假设与引理 2.11 的 1) 知

$$L_l \subseteq L_l^{-1} = \mathrm{W}(\mathcal{F}_1,n)_l^{-1} = \mathrm{W}(\mathcal{F}_1,n)_l,$$

所以 $L_l = \mathrm{W}(\mathcal{F}_1,n)_l$.

(b) 若 $l = p^t - 1$, 通过延长旗 $\mathcal{F}_1$, 构作如下的旗

$$\mathcal{F}_2 : V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq V_{t-1} = V_t' \supseteq V_{t+1}' = 0.$$

易见, 对任意 $i < l$, 均有 $\mathrm{W}(\mathcal{F}_2,n)_i = \mathrm{W}(\mathcal{F}_1,n)_i$. 于是

$$\mathrm{W}'(\mathcal{F}_2,n)_l = \mathrm{W}'(\mathcal{F}_1,n)_l = L_l', \tag{2.12}$$

其中 $L_l' := \sum_{i=1}^{l-1}[L_i, L_{l-i}]$. 显然 $L_l' \subseteq L_l$. 由归纳假设与引理 2.11 的 2), 可得

$$L_l \subseteq L_l^{-1} = \mathrm{W}(\mathcal{F}_1,n)_l^{-1} = \mathrm{W}(\mathcal{F}_2,n)_l. \tag{2.13}$$

由引理 2.8 的 3) 与 (2.12) 式可得

$$\begin{aligned}\mathrm{W}(\mathcal{F}_2,n)_l &= \mathrm{W}'(\mathcal{F}_2,n)_l + \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(p^t)}\mathrm{D}_i \mid x \in V_t',\ i \in Y\} \\ &= L_l' + \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(p^t)}\mathrm{D}_i \mid x \in V_t',\ i \in Y\}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

令 $Q = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x \in V_t' \mid x^{(p^t)}\mathrm{D}_i + L_l' \in L_l/L_l',\ i \in Y\}$. 设

$$R = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(p^t)}\mathrm{D}_i + L_l' \mid x \in Q,\ i \in Y\}.$$

显然 $R \subseteq L_l/L_l'$.

任取 $z + L_l' \in L_l \backslash L_l'$, 其中 $z \in L_l \subseteq \mathrm{W}(\mathcal{F}_2,n)_l$. 由 (2.13) 与 (2.14) 式, 可设 $z = \sum_{i=1}^s h_i\mathrm{D}_i$, 其中

$$h_i = b_1 f_{i_1}^{(p^t)} + \cdots + b_k f_{i_k}^{(p^t)}, \quad f_{i_1}, \cdots, f_{i_k} \in V_t',\ b_1, \cdots, b_k \in \mathbb{F}.$$

因为 $\mathbb{F}$ 是代数闭域, 所以可设

$$h_i\mathrm{D}_i = (g_{i_1} + \cdots + g_{i_k})^{(p^t)}\mathrm{D}_i + h_i'\mathrm{D}_i,$$

这里 h_i' 是形如 $af_{i_1}^{(l_1)}\cdots f_{i_k}^{(l_k)}$ 的元素之和, 其中 $a \in \mathbb{F}$, $l_i < p^t$, $i = 1, \cdots, k$. 从而 $h_i\mathrm{D}_i \in \mathrm{W}'(\mathcal{F}_2,n)_l = L_l'$. 设 $g_i = g_{i_1} + \cdots + g_{i_k}$, 则 $h_i\mathrm{D}_i + L_l' = g_i^{(p^t)}\mathrm{D}_i + L_l'$. 于是

$$z + L_l' = \sum_{i=1}^s g_i^{(p^t)}\mathrm{D}_i + L_l', \qquad \text{其中} g_i \in V_t'.$$

设 $\{x_1, \cdots, x_m\}$ 是 V 的相应于旗 $\mathcal{F}_1$ 的基底. 易见 $\{x_1, \cdots, x_m\}$ 也是相应于旗 $\mathcal{F}_2$ 的基底. 于是 $V_t' \cap \{x_1, \cdots, x_m\}$ 是 V_t' 的基底. 不妨设 $\{x_1, \cdots, x_v\} = V_t' \cap \{x_1, \cdots, x_m\}$. 因为 $g_i \in V_t'$, 故可设 $g_i = \sum_{r=1}^v a_r x_r$, $a_r \in \mathbb{F}$, 从而

$$g_i^{(p^t)} = \left(\sum_{r=1}^v a_{ir}x_r\right)^{(p^t)} = \sum_{r=1}^v a_{ir}^{p^t} x_r^{(p^t)} + h_i,$$

其中 h_i 的各项均不含因子 $x_r^{(p^t)}$, $r = 1, \cdots, v$. 随之,

$$\mathrm{D}_j(g_i^{(p^t)}) = \begin{cases} a_{ij}^{p^t} x_j^{(p^t-1)} + \mathrm{D}_j(h_i), & j \in \{1, \cdots, v\}, \\ 0, & j \in Y\backslash\{1, \cdots, v\}. \end{cases}$$

所以 $\mathrm{D}_j(g_i^{(p^t)})\mathrm{D}_i \in \mathrm{W}'(\mathcal{F}_2,n)_l$. 故对任意 $k \in Y$, 有

$$x_k\mathrm{D}_j(g_i^{(p^t)})\mathrm{D}_i \in \mathrm{W}'(\mathcal{F}_2,n)_l. \tag{2.15}$$

因为 L_l/L_l' 是 L_0- 模, 所以对任意 $k, j \in Y$, 有

$$\mathrm{ad}\,(x_k\mathrm{D}_j)(z + L_l') \in L_l/L_l'.$$

由 (2.15) 式知

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}\,(x_k\mathrm{D}_j)(z+L_l') &= [x_k\mathrm{D}_j, z]+L_l' \\ &= \left[x_k\mathrm{D}_j, \sum_{i=1}^{s} g_i^{(p^t)}\mathrm{D}_i\right]+L_l' \\ &= \sum_{i=1}^{s} x_k\mathrm{D}_j(g_i^{(p^t)})\mathrm{D}_i - \lambda g_k^{(p^t)}\mathrm{D}_j + L_l' \\ &= -\lambda g_k^{(p^t)}\mathrm{D}_j + L_l'.\end{aligned}$$

其中 $\lambda = 1$ 或 -1. 于是 $g_k^{(p^t)}\mathrm{D}_j + L_l' \in L_l/L_l'$, $\forall j \in Y$. 因此 $g_k \in Q$, $\forall k \in Y$, 从而 $g_k^{(p^t)}\mathrm{D}_k + L_l' \in R$. 所以

$$\begin{aligned}z+L_l' &= \sum_{i=1}^{s} g_i^{(p^t)}\mathrm{D}_i + L_l' = \sum_{k=1}^{s} g_k^{(p^t)}\mathrm{D}_k + L_l' \\ &= \sum_{k=1}^{s}(g_k^{(p^t)}\mathrm{D}_k + L_l') \in R.\end{aligned}$$

于是 $L_l/L_l' \subseteq R$. 则

$$L_l/L_l' = R = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(p^t)}\mathrm{D}_i + L_l' \mid x \in Q,\ i \in Y\}$$

从而可推得

$$L_l = L_l' + \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(p^t)}\mathrm{D}_i \mid x \in Q,\ i \in Y\}. \tag{2.16}$$

令

$$\mathcal{F}_3 : V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq V_{t-1} \supseteq V_t'' \supseteq V_{t+1}'' = 0,$$

其中 $V_t'' = Q$. 易见 $L_i = \mathrm{W}(\mathcal{F}_2, n)_i = \mathrm{W}(\mathcal{F}_3, n)_i$, $\forall i < l$, 于是 $L_l' = \mathrm{W}'(\mathcal{F}_3, n)_l$. 由 (2.16) 式知

$$L_l = \mathrm{W}'(\mathcal{F}_3, n)_l + \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(p^t)}\mathrm{D}_i \mid x \in V_t'',\ i \in Y\}.$$

由引理 2.8 的 3) 知 $L_l = \mathrm{W}(\mathcal{F}_3, n)_l$, 归纳法完成. 这就证明了存在 V 的一个旗 $\mathcal{F}$, 使得 $L = \mathrm{W}(\mathcal{F}, n)$.

以下我们先证明定理的 2). 最后再证明 1) 中的情形 (ii) 不能发生.

2) 由已知 $L_0 \cong \mathrm{spl}(L_{-1})$. 由引理 2.6 的 2) 与 $L_2 \neq 0$ 知, $L_1 \cong \mathrm{S}(V, n)_1$. 由于 $\mathrm{spl}(L_{-1}) \cong \mathrm{S}(V, n)_0$, 所以不妨设 $L_0 = \mathrm{S}(V, n)_0$, $L_1 = \mathrm{S}(V, n)_1$. 下面对 i 用归纳法, 证明存在 V 的旗 $\mathcal{F}$, 使得

$$\mathrm{S}(\mathcal{F}, n)_i \subseteq L_i \subseteq \overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F}, n)_i, \quad \forall i \geq 1. \tag{2.17}$$

我们仅概述归纳过程, 细节证明留给读者. 假设存在 V 的旗

$$\mathcal{F}_1 : V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq V_{h-1} \supseteq V_h = 0,$$

使得 $\mathrm{S}(\mathcal{F}_1,n)_i \subseteq L_i \subseteq \overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F},n)_i$, $\forall i<l$. 可设 $p^{t-1}\leq l<p^t$, 其中 $t\in\mathbb{N}$. 若 $t\leq h$, 则令 $V_t=\cdots=V_h=0$. 若 $t>h$, 则令 $V_h=\cdots=V_t=0$. 于是可得旗

$$\mathcal{F}_2: V=V_0\supseteq V_1\supseteq\cdots\supseteq V_{t-1}\supseteq V_t=0.$$

易见 $\mathrm{S}(\mathcal{F}_2,n)_i\subseteq L_i\subseteq\overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F}_2,n)_i$, $\forall i<l$. 由第二章引理 3.9 的证明知 $[\overline{\mathrm{S}},\overline{\mathrm{S}}]\subseteq\mathrm{S}$, 故对 V 的任意旗 $\mathcal{F}$, 则有 $[\overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F},n),\overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F},n)]\subseteq\mathrm{S}(\mathcal{F},n)$. 于是可得 $\mathrm{S}'(\mathcal{F}_2,n)_l=\overline{\mathrm{S}}'(\mathcal{F}_2,n)_l$, 从而可知 $L_l'=\mathrm{S}(\mathcal{F}_2,n)_l$.

(a) 若 $l\neq p^t-1$, 由归纳假设与推论 2.10 的 1) 知

$$L_l\supseteq L_l'=\mathrm{S}'(\mathcal{F}_2,n)_l=\mathrm{S}(\mathcal{F}_2,n)_l.$$

由引理 2.11 的 1) 知

$$L_l\subseteq L_l^{-1}\subseteq\overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F}_2,n)_l^{-1}=\overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F}_2,n)_l,$$

所以

$$\mathrm{S}(\mathcal{F}_2,n)_l\subseteq L_l\subseteq\overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F}_2,n)_l.$$

(b) 若 $l=p^t-1$, 通过延长旗 $\mathcal{F}_2$, 构作如下的旗

$$\mathcal{F}_3: V_0\supseteq V_1\supseteq\cdots\supseteq V_{t-1}=V_t'\supseteq V_{t+1}'=0.$$

利用归纳假设与引理 2.11 的 2), 可得

$$\mathrm{S}'(\mathcal{F}_3,n)_l=\mathrm{S}'(\mathcal{F}_2,n)_l=L_l'\subseteq L_l\subseteq L_l^{-1}\subseteq\overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F}_2,n)_l^{-1}=\overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F}_3,n)_l,$$

特别地, $L_l\subseteq\overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F}_3,n)_l$. 由推论 2.10 知

$$\mathrm{S}(\mathcal{F}_3,n)_l=\mathrm{S}'(\mathcal{F}_3,n)_l+\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D}_{ij}(x^{(p^t)}x_k)\mid x\in V_t',\ i,j,k\in Y\}.$$

令

$$Q=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x\in V_t'\mid \mathrm{D}_{ij}(x^{(p^t)}x_k)+L_l'\in L_l/L_l',\ i,j,k\in Y\},$$
$$R=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D}_{ij}(x^{(p^t)}x_k)+L_l'\mid x\in Q,\ i,j,k\in Y\}.$$

仿 1) 中的 (b) 可证得 $L_l/L_l'=R$, 进而可得 $L_l=L_l'+M$, 这里 $M=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D}_{ij}(x^{(p^t)}x_k)\mid x\in Q, i,j,k\in Y\}$. 令

$$\mathcal{F}_4: V=V_0\supseteq V_1\supseteq\cdots\supseteq V_{t-1}\supseteq V_t''\supseteq V_{t+1}''=0,$$

其中 $V_t''=Q$. 则有

$$\mathrm{S}'(\mathcal{F}_4,n)_l+M\subseteq L_l'+M\subseteq\overline{\mathrm{S}}'(\mathcal{F}_4,n)_l+M.$$

于是

$$\mathrm{S}(\mathcal{F}_4,n)_l\subseteq L_l\subseteq\overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F}_4,n)_l.$$

归纳法完成. 于是 (2.17) 式成立.

假设存在 $i \in \mathbb{N}$ 使得 (2.17) 式中的 $\mathrm{S}(\mathcal{F},n)_i \neq L_i$, 即 $\mathrm{S}(\mathcal{F},n)_i \subsetneq L_i$. 因为 $\mathrm{S}(\mathcal{F},n)$ 是 $\overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F},n)$ 的理想, 所以由 (2.17) 式知, $\mathrm{S}(\mathcal{F},n)$ 是 L 的真理想, 此与 L 是单李超代数矛盾. 于是 $L = \mathrm{S}(\mathcal{F},n)$.

最后我们说明, 若 $L = \bigoplus_{i\geq -1} L_i$ 满足定理的条件, 则情形 (ii) 不能发生. 否则, $L_0 = \mathrm{W}(V,n)_0$, $L_1 = \mathrm{S}(V,n)_1$. 令 $\overline{L}_{-1} = \mathrm{S}(V,n)_{-1}$, $\overline{L}_0 = \mathrm{S}(V,n)_0$, $\overline{L}_i = L_i$, $\forall i > 0$. 设 $\overline{L} = \bigoplus_{i\geq -1} \overline{L}_i$, 则 $\overline{L}$ 是 L 的 $\mathbb{Z}$- 阶化子代数. 由 2) 知, 存在旗 $\mathcal{F}$, 使得

$$\mathrm{S}(\mathcal{F},n) \subseteq \overline{L} \subseteq \overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F},n). \tag{2.18}$$

令 $\mathrm{S}^*(\mathcal{F},n) = \overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F},n) + \mathrm{W}(V,n)_0$. 若 $\mathrm{D} \in \mathrm{W}(V,n)_0 = \mathrm{W}(\mathcal{F},n)_0$, $E \in \overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F},n)_i$, $\forall i \geq -1$, 由第二章引理 3.8 知, $\mathrm{div}([\mathrm{D},E]) = 0$, 则有

$$[\mathrm{D},E] \in \overline{\mathrm{S}}(V,n)_i \cap \mathrm{W}(\mathcal{F},n)_i = \overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F},n)_i.$$

于是可知 $\mathrm{S}^*(\mathcal{F},n)$ 是 $\mathrm{W}(V,n)$ 的子代数, $\overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F},n)$ 是 $\mathrm{S}^*(\mathcal{F},n)$ 的理想. 由 (2.18) 式可知

$$\mathrm{S}(\mathcal{F},n) \subseteq \overline{L} + \mathrm{W}(V,n)_0 \subseteq \overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F},n) + \mathrm{W}(V,n)_0,$$

所以

$$\mathrm{S}(\mathcal{F},n) \subseteq L \subseteq \mathrm{S}^*(\mathcal{F},n). \tag{2.19}$$

注意 $\mathrm{S}(\mathcal{F},n) = \overline{\mathrm{S}}(\mathcal{F},n)^{(1)}$, 于是可推得 $\mathrm{S}(\mathcal{F},n)$ 是 $\mathrm{S}^*(\mathcal{F},n)$ 的理想. 由 (2.19) 式知 $\mathrm{S}(\mathcal{F},n)$ 是 L 的理想. 因为 $L_0 \neq \mathrm{S}(\mathcal{F},n)_0$, 故 $\mathrm{S}(\mathcal{F},n)$ 是 L 的真理想, 此与 L 的单性矛盾. 所以情形 (ii) 不能发生. 定理得证. □

第六章 阶 化 模

本章将文献 [88] 中的混合积推广到 Cartan 型模李超代数, 从而实现了 Cartan 型李超代数的阶化模. 进而讨论了 Cartan 型单李超代数 $\mathrm{H}(m,n,\underline{t})$ 的阶化模. 本章的最后一节将文献 [81] 中的 ad- 幂零元的方法推广到李超代数, 从而证明了两类特征零域上无限维 Cartan 型李超代数的自然滤过是不变的, 进而证明了它们的自同构都是由其底代数的自同构诱导的.

§1 混 合 积

设 $\mathbb{F}$ 是特征数 $p>2$ 的域, $V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化空间. 令 $\dim V_{\bar{0}}=m$, $\dim V_{\bar{1}}=n$. 设 $\mathrm{pl}(V)$ 是 $\mathbb{F}$ 上一般线性李超代数. 令 $e_1,\cdots,e_m$ 是 $V_{\bar{0}}$ 的基底, $e_{m+1},\cdots,e_s$ 是 $V_{\bar{1}}$ 的基底, 其中 $s=m+n$. 置

$$\mathrm{pl}_{\bar{0}}(m,n)=\left\{\left[\begin{smallmatrix}A&0\\0&D\end{smallmatrix}\right]\,\middle|\,A\text{ 是 }\mathbb{F}\text{ 上 }m\times m\text{ 阵},\ D\text{ 是 }\mathbb{F}\text{ 上 }n\times n\text{ 阵}\right\},$$

$$\mathrm{pl}_{\bar{1}}(m,n)=\left\{\left[\begin{smallmatrix}0&B\\C&0\end{smallmatrix}\right]\,\middle|\,B\text{ 是 }\mathbb{F}\text{ 上 }m\times n\text{ 阵},\ C\text{ 是 }\mathbb{F}\text{ 上 }n\times m\text{ 阵}\right\},$$

则 $\mathrm{pl}(m,n)=\mathrm{pl}_{\bar{0}}(m,n)\oplus\mathrm{pl}_{\bar{1}}(m,n)$ 是与 $\mathrm{pl}(V)$ 同构的李超代数. 令

$$\overline{\mathrm{pl}}(m,n,\underline{t})=\Lambda(m,n,\underline{t})\otimes\mathrm{pl}(m,n).$$

在 $\overline{\mathrm{pl}}(m,n,\underline{t})$ 中如下定义 $[\,,\,]$ 运算:

$$[a\otimes x,b\otimes y]=(-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(b)}ab\otimes[x,y],\tag{1.1}$$

其中 $a,b\in\Lambda(m,n,\underline{t})$, $x,y\in\mathrm{pl}(m,n)$, 则 $\overline{\mathrm{pl}}(m,n,\underline{t})$ 是一个李超代数. 若 $A\in\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$, 则令 $A\otimes 1\in\mathrm{End}(\overline{\mathrm{pl}}(m,n,\underline{t}))$, 使得

$$(A\otimes 1)(a\otimes x)=A(a)\otimes x,\quad a\in\Lambda(m,n,\underline{t}),\ x\in\mathrm{pl}(m,n).\tag{1.2}$$

令 $P\in\mathrm{pl}_{\bar{0}}(m,n)$, 并且 P 是可逆阵. 设 $A=\sum_{i=1}^{s}f_i\mathrm{D}_i\in\mathrm{W}(m,n,\underline{t})_\theta$, 其中 $\theta\in\mathbb{Z}_2$. 令

$$\widetilde{A}=\sum_{k,j=1}^{s}(-1)^{(k,\theta,j)}\mathrm{D}_k(f_j)\otimes P^{-1}E_{kj}P,\tag{1.3}$$

其中 $(k,\theta,j)=\tau(k)(\theta+\tau(j))+\tau(j)$, E_{ij} 是 $s\times s$ 矩阵, 它的 (i,l) 位置元素是 $\delta_{ki}\delta_{jl}$. 则 $\widetilde{A}\in\overline{\mathrm{pl}}_\theta(m,n,\underline{t})$. 因为 $\mathrm{d}(E_{kj})=\tau(k)+\tau(j)$, $\forall k,j\in Y=\{1,2,\cdots,s\}$, 所以

$$[E_{kj},E_{il}]=\delta_{ji}E_{kl}-(-1)^{(\tau(k)+\tau(j))(\tau(i)+\tau(l))}\delta_{kl}E_{ij}.$$

命题 1.1 设 $C=[A,B]$, 其中 $A\in\mathrm{W}(m,n,\underline{t})_\theta$, $B\in\mathrm{W}(m,n,\underline{t})_\mu$, $\theta,\mu\in\mathbb{Z}_2$. 则

$$\widetilde{C}=[\widetilde{A},\widetilde{B}]+(A\otimes 1)(\widetilde{B})-(-1)^{\theta\mu}(B\otimes 1)(\widetilde{A}).$$

证明 设 $A=\sum_{i=1}^{s} f_i\mathrm{D}_i$, $B=\sum_{j=1}^{s} g_j\mathrm{D}_j$. 则 $\mathrm{d}(g_j)=\mu+\tau(j)$, $\forall j\in Y$. 由等式 (1.1) 可得

$$\begin{aligned}&[\mathrm{D}_k(f_j)\otimes P^{-1}E_{kj}P,\mathrm{D}_i(g_l)\otimes P^{-1}E_{il}P]\\&\quad=(-1)^{(\tau(k)+\tau(j))(\tau(i)+\mu+\tau(l))}\mathrm{D}_k(f_j)\mathrm{D}_i(g_l)\otimes P^{-1}[E_{kj},E_{il}]P.\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}&[\widetilde{A},\widetilde{B}]\\
=&\left[\sum_{k,j}(-1)^{(k,\theta,j)}\mathrm{D}_k(f_j)\otimes P^{-1}E_{kj}P,\ \sum_{i,l}(-1)^{(i,\mu,l)}\mathrm{D}_i(g_l)\otimes P^{-1}E_{il}P\right]\\
=&\sum_{k,j,i,l}(-1)^{(k,\theta,j)+(i,\mu,l)}[\mathrm{D}_k(f_j)\otimes P^{-1}E_{kj}P,\ \mathrm{D}_i(g_l)\otimes P^{-1}E_{il}P]\\
=&\sum_{k,j,i,l}(-1)^{(k,\theta,j)+(i,\mu,l)+(\tau(k)+\tau(j))(\tau(i)+\mu+\tau(l))}\mathrm{D}_k(f_j)\mathrm{D}_i(g_l)\\
&\otimes P^{-1}[E_{kj},E_{il}]P\\
=&\sum_{k,j,i,l}(-1)^{(k,\theta,j)+(i,\mu,l)+(\tau(k)+\tau(j))(\tau(i)+\mu+\tau(l))}\mathrm{D}_k(f_j)\mathrm{D}_i(g_l)\\
&\otimes P^{-1}(\delta_{ji}E_{kl}-(-1)^{(\tau(k)+\tau(j))(\tau(i)+\tau(l))}\delta_{kl}E_{ij})P\\
=&\sum_{k,i,l}(-1)^{(k,\theta+\mu,l)}\mathrm{D}_k(f_i)\mathrm{D}_i(g_l)\otimes P^{-1}E_{kl}P\\
&-\sum_{k,j,i}(-1)^{(k,\theta+\mu,j)+(i,\mu,k)+\mu(\tau(k)+\tau(j))}\mathrm{D}_k(f_j)\mathrm{D}_i(g_k)\otimes P^{-1}E_{ij}P\\
=&\sum_{k,i,l}(-1)^{(k,\theta+\mu,l)}\mathrm{D}_k(f_i)\mathrm{D}_i(g_l)\otimes P^{-1}E_{kl}P\\
&-\sum_{k,j,i}(-1)^{(k,\theta+\mu,j)+\theta\mu}\mathrm{D}_i(g_k)\mathrm{D}_k(f_j)\otimes P^{-1}E_{ij}P\\
=&\sum_{k,l,j}(-1)^{(k,\theta+\mu,j)}\mathrm{D}_k(f_l)\mathrm{D}_l(g_j)\otimes P^{-1}E_{kj}P\\
&-\sum_{k,l,j}(-1)^{(k,\theta+\mu,j)+\theta\mu}\mathrm{D}_k(g_l)\mathrm{D}_l(f_j)\otimes P^{-1}E_{kj}P\\
=&\sum_{k,l,j}(-1)^{(k,\theta+\mu,j)}\big(\mathrm{D}_k(f_l)\mathrm{D}_l(g_j)-(-1)^{\theta\mu}\mathrm{D}_k(g_l)\mathrm{D}_l(f_j)\big)\\
&\otimes P^{-1}E_{kj}P.\end{aligned}\tag{1.4}$$

直接计算知, $[A,B]=\sum_{j=1}^{s} q_j\mathrm{D}_j$, 其中

$$q_j=\sum_{l=1}^{s}\big(f_l\mathrm{D}_l(g_j)-(-1)^{\theta\mu}g_l\mathrm{D}_l(f_j)\big).$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_k(q_j) &= \sum_{l=1}^{s} \mathrm{D}_k\big(f_l \mathrm{D}_l(g_j)\big) - (-1)^{\theta\mu} \sum_{l=1}^{s} \mathrm{D}_k\big(g_l \mathrm{D}_l(f_j)\big) \\ &= \sum_{l=1}^{s} \big(\mathrm{D}_k(f_l)\mathrm{D}_l(g_j) - (-1)^{\theta\mu}\mathrm{D}_k(g_l)\mathrm{D}_l(f_j)\big) \\ &\quad + \sum_{l=1}^{s} \big((-1)^{\tau(k)(\theta+\tau(l))} f_l \mathrm{D}_k \mathrm{D}_l(g_j) \\ &\quad - (-1)^{\theta\mu+\tau(k)(\mu+\tau(l))} g_l \mathrm{D}_k \mathrm{D}_l(f_j)\big). \end{aligned} \tag{1.5}$$

由 (1.5) 式可得

$$\begin{aligned}\widetilde{C} &= \sum_{k,j} (-1)^{(k,\theta+\mu,j)} \mathrm{D}_k(q_j) \otimes P^{-1}E_{kj}P \\ &= \sum_{k,j,l} (-1)^{(k,\theta+\mu,j)} \big(\mathrm{D}_k(f_l)\mathrm{D}_l(g_j) \\ &\quad - (-1)^{\theta\mu}\mathrm{D}_k(g_l)\mathrm{D}_l(f_j)\big) \otimes P^{-1}E_{kj}P \\ &\quad + \sum_{k,j,l} (-1)^{(k,\mu,j)+\tau(k)\tau(l)} f_l \mathrm{D}_k \mathrm{D}_l(g_j) \otimes P^{-1}E_{kj}P \\ &\quad - \sum_{k,j,l} (-1)^{(k,\theta,j)+\tau(k)\tau(l)+\theta\mu} g_l \mathrm{D}_k \mathrm{D}_l(f_j) \otimes P^{-1}E_{kj}P. \end{aligned} \tag{1.6}$$

由计算知

$$\begin{aligned}(A\otimes 1)(\widetilde{B}) &= \left(\left(\sum_{l=1}^{s} f_l \mathrm{D}_l\right) \otimes 1\right) \left(\sum_{k,j} (-1)^{(k,\mu,j)} \mathrm{D}_k(g_j) \otimes P^{-1}E_{kj}P\right) \\ &= \sum_{k,j,l} (-1)^{(k,\mu,j)+\tau(k)\tau(l)} f_l \mathrm{D}_k \mathrm{D}_l(g_j) \otimes P^{-1}E_{ij}P, \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$(B\otimes 1)(\widetilde{A}) = \sum_{k,j,l} (-1)^{(k,\alpha,j)+\tau(k)\tau(l)} g_l \mathrm{D}_k \mathrm{D}_l(f_j) \otimes P^{-1}E_{kj}P. \tag{1.8}$$

由 (1.6), (1.4), (1.7) 与 (1.8) 式即可得

$$\widetilde{C} = [\widetilde{A}, \widetilde{B}] + (A\otimes 1)(\widetilde{B}) - (-1)^{\theta\mu}(B\otimes 1)(\widetilde{A}).$$

命题得证. □

设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathrm{pl}(m,n)$ 的子代数, $P \in \mathrm{pl}_{\bar{0}}(m,n)$, 并且 P 是可逆阵. 令 $\mathcal{L}(P) = \{P^{-1}QP \mid Q \in \mathcal{L}\}$, 则 $\mathcal{L}(P)$ 是 $\mathrm{pl}(m,n)$ 的子代数. 若 $\theta \in \mathbb{Z}_2$, 令

$$\Omega_\theta = \{A \in \mathrm{W}(m,n,\underline{t})_\theta \mid \widetilde{A} \in \Lambda(m,n,\underline{t}) \otimes \mathcal{L}(P)\}.$$

设 $\Omega = \Omega_{\bar{0}} \oplus \Omega_{\bar{1}}$. 若 $A \in \Omega_\theta$, $B \in \Omega_\mu$, $\theta, \mu \in \mathbb{Z}_2$, 则 $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \Lambda(m,n,\underline{t}) \otimes \mathcal{L}(P)$. 由 (1.1) 式知 $[\widetilde{A}, \widetilde{B}] \in \Lambda(m,n,\underline{t}) \otimes \mathcal{L}(P)$. 由 (1.2) 式知, $(A\otimes 1)(\widetilde{B})$ 与 $(B\otimes 1)(\widetilde{A})$ 均属于 $\Lambda(m,n,\underline{t}) \otimes$

$\mathcal{L}(P)$. 由命题 1.1 知 $[A,B]\in\Omega$, 故 Ω 是 $\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$ 的子代数. 仿文献 [88], 我们称 Ω 为 $\mathcal{L}$ 在 $\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$ 中的 P- 伸张. 若 P 是单位阵, 则称 Ω 为 $\mathcal{L}$ 在 $\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$ 中的伸张.

易见, $\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$ 就是 $\mathrm{pl}(m,n)$ 在 $\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$ 中的伸张.

设 $Q=\left[\begin{smallmatrix}B & C\\ D & H\end{smallmatrix}\right]\in\mathrm{pl}(m,n)$, 其中 B 是 $m\times m$ 阵, H 是 $n\times n$ 阵. 由第四章 §3 节知, $\mathrm{str}(Q)=\mathrm{tr}(B)-\mathrm{tr}(H)$. 令

$$\mathrm{spl}(m,n)=\{Q\in\mathrm{pl}(m,n)\mid\mathrm{str}(Q)=0\},$$

则 $\mathrm{spl}(m,n)$ 是 $\mathrm{pl}(m,n)$ 的子代数. 显然李超代数 $\mathrm{spl}(m,n)$ 同构于李超代数 $\mathrm{spl}(V)$, 其中 $V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$, $\dim V_{\bar{0}}=m$, $\dim V_{\bar{1}}=n$.

命题 1.2　$\overline{\mathrm{S}}(m,n,\underline{t})$ 是 $\mathrm{spl}(m,n)$ 在 $\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$ 中的伸张.

证明　设 $\Omega=\Omega_{\bar{0}}\oplus\Omega_{\bar{1}}$ 是 $\mathrm{spl}(m,n)$ 在 $\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$ 中的伸张. 令 $A=\sum_{i=1}^{s}f_i\mathrm{D}_i\in\mathrm{W}(m,n,\underline{t})_\theta$, 其中 $\theta\in\mathbb{Z}_2$, 则

$$A\in\Omega_\theta\Longleftrightarrow\sum_{k,j=1}^{s}(-1)^{(k,\theta,j)}\mathrm{D}_k(f_j)\otimes E_{kj}\in\Lambda(m,n,\underline{t})\otimes\mathrm{spl}(m,n).$$

若 $k\neq j$, 则 $E_{kj}\in\mathrm{spl}(m,n)$. 所以

$$A\in\Omega_\theta\Longleftrightarrow\sum_{k=1}^{s}(-1)^{\tau(k)\theta}\mathrm{D}_k(f_k)\otimes E_{kk}\in\Lambda(m,n,\underline{t})\otimes\mathrm{spl}(m,n).\tag{1.9}$$

因为 $E_{11}-(-1)^{\tau(k)}E_{kk}\in\mathrm{spl}(m,n)$, 所以

$$\begin{aligned}&(-1)^{\tau(k)\theta+\tau(k)}E_{11}-(-1)^{\tau(k)\theta}E_{kk}\\&\quad=(-1)^{\tau(k)\theta+\tau(k)}(E_{11}-(-1)^{\tau(k)}E_{kk})\in\mathrm{spl}(m,n),\end{aligned}$$

其中 $k=2,3,\cdots,s$. 由 (1.9) 式知

$$\begin{aligned}A\in\Omega_\theta\Longleftrightarrow&\sum_{k=1}^{s}(-1)^{\tau(k)\theta}\mathrm{D}_k(f_k)\otimes E_{kk}\\&+\sum_{k=2}^{s}\mathrm{D}_k(f_k)\otimes\left((-1)^{\tau(k)\theta+\tau(k)}E_{11}-(-1)^{\tau(k)\theta}E_{kk}\right)\\&\in\Lambda(m,n,\underline{t})\otimes\mathrm{spl}(m,n)\\\Longleftrightarrow&\left(\sum_{k=1}^{s}(-1)^{\tau(k)\theta+\tau(k)}\mathrm{D}_k(f_k)\right)\otimes E_{11}\in\Lambda(m,n,\underline{t})\otimes\mathrm{spl}(m,n).\end{aligned}$$

因为 $E_{11}\notin\mathrm{spl}(m,n)$, 所以

$$\begin{aligned}A\in\Omega_\theta&\Longleftrightarrow\sum_{k=1}^{s}(-1)^{\tau(k)\theta+\tau(k)}\mathrm{D}_k(f_k)=0\\&\Longleftrightarrow A\in\overline{\mathrm{S}}(m,n,\underline{t})_\theta,\quad\forall\theta\in\mathbb{Z}_2.\end{aligned}$$

因此 $\Omega = \overline{\mathrm{S}}(m,n,\underline{t})$. □

设 $\mathcal{L}(P)$ 是前面所定义的 $\mathrm{pl}(m,n)$ 的子代数, ρ 是 $\mathcal{L}(P)$ 在 $\mathbb{Z}_2$- 阶化空间 V 上的表示, 则 ρ 可扩张为 $\Lambda(m,n,\underline{t})\otimes\mathcal{L}(P)$ 在 $\Lambda(m,n,\underline{t})\otimes V$ 上的表示 ρ_1, 使得

$$\rho_1(a\otimes x)(b\otimes v) = (-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(b)}ab\otimes\rho(x)v, \tag{1.10}$$

其中 $a,b\in\Lambda(m,n,\underline{t})$, $x\in\mathcal{L}$, $v\in V$.

定理 1.3 设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathrm{pl}(m,n)$ 的子代数, $P\in\mathrm{pl}_{\bar{0}}(m,n)$ 是可逆阵, Ω 是 $\mathcal{L}$ 在 $\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$ 中的 P- 伸张. 令 ρ 是 $\mathcal{L}(P)$ 在 $\mathbb{Z}_2$- 阶化空间 V 上的表示. 则

$$\widetilde{\rho}(A) := \rho_1(\widetilde{A}) + A\otimes 1,\quad A\in\Omega,$$

定义了 Ω 在 $\mathbb{Z}_2$- 阶化空间 $\Lambda(m,n,\underline{t})\otimes V$ 上的一个表示, 这里 ρ_1 的定义如 (1.10) 式.

证明 设 $A\in\Omega_\theta$, $B\in\Omega_\mu$, 其中 $\theta,\mu\in\mathbb{Z}_2$. 任取 $f\in\Lambda(m,n,\underline{t})$, $v\in V$, 则

$$\begin{aligned}&[\rho_1(\widetilde{A}), B\otimes 1](f\otimes v)\\&\quad= \rho_1(\widetilde{A})(B(f)\otimes v) - (-1)^{\theta\mu}(B\otimes 1)\rho_1(\widetilde{A})(f\otimes v).\end{aligned}$$

由 (1.2) 式知

$$\begin{aligned}&\rho_1(\widetilde{A})\big(B(f)\otimes v\big) - (-1)^{\theta\mu}(B\otimes 1)\rho_1(\widetilde{A})(f\otimes v)\\&\quad= -(-1)^{\theta\mu}\rho_1\big((B\otimes 1)(\widetilde{A})\big)(f\otimes v).\end{aligned}$$

于是

$$[\rho_1(\widetilde{A}), B\otimes 1] = -(-1)^{\theta\mu}\rho_1\big((B\otimes 1)(\widetilde{A})\big).$$

同理可推得

$$[A\otimes 1, \rho_1(\widetilde{B})] = \rho_1\big((A\otimes 1)(\widetilde{B})\big).$$

于是有

$$\begin{aligned}&[\widetilde{\rho}(A), \widetilde{\rho}(B)]\\=&[\rho_1(\widetilde{A}) + A\otimes 1, \rho_1(\widetilde{B}) + B\otimes 1]\\=&[\rho_1(\widetilde{A}), \rho_1(\widetilde{B})] + [\rho_1(\widetilde{A}), B\otimes 1]\\&+[A\otimes 1, \rho_1(\widetilde{B})] + [A\otimes 1, B\otimes 1]\\=&\rho_1\big([\widetilde{A}, \widetilde{B}]\big) - (-1)^{\theta\mu}\rho_1\big((B\otimes 1)(\widetilde{A})\big)\\&+\rho_1\big((A\otimes 1)(\widetilde{B})\big) + [A,B]\otimes 1.\end{aligned}$$

设 $C = [A,B]$. 由命题 1.1 知

$$[\widetilde{\rho}(A), \widetilde{\rho}(B)] = \rho_1(\widetilde{C}) + [A,B]\otimes 1 = \widetilde{\rho}\big([A,B]\big),$$

所以 $\widetilde{\rho}$ 是 $\Lambda(m,n,\underline{t})\otimes V$ 上的一个表示. □

定理 1.3 中定义的表示 $\widetilde{\rho}$ 使得 $\Lambda(m,n,\underline{t})\otimes V$ 是一个 Ω- 模, 记这个 Ω- 模为 $\widetilde{V}$, 并称 $\widetilde{V}$ 是 $\Lambda(m,n,\underline{t})$ 与模 V 的混合积. 设 $i\in\mathbb{N}_0$. 令

$$\widetilde{V}_i=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{f\otimes v\mid f\in\Lambda(m,n,\underline{t})_i,\ v\in V\},\tag{1.11}$$

则 $\widetilde{V}=\bigoplus_{i=0}^{\xi}\widetilde{V}_i$, 其中 $\xi=\sum_{i=1}^{m}\pi_i+n$. 当 $i>\xi$ 时, 约定 $\widetilde{V}_i=0$. 直接验证可知, $\widetilde{\rho}(\Omega_i)(\widetilde{V}_j)\subseteq\widetilde{V}_{i+j}$, $\forall i,j\in\mathbb{N}_0$. 于是我们称 $\widetilde{V}$ 为 $\mathbb{Z}$- 阶化的 Ω- 模. 因为 $\mathrm{pl}(m,n)$ 与 $\mathrm{spl}(m,n)$ 在 $\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$ 中的伸张分别为 $\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$ 与 $\overline{\mathrm{S}}(m,n,\underline{t})$, 所以定理 1.3 有以下推论.

推论 1.4 1) 若 V 是 $\mathrm{pl}(m,n)$- 模, 则混合积 $\widetilde{V}$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化的 $\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$- 模.

2) 若 V 是 $\mathrm{spl}(m,n)$- 模, 则混合积 $\widetilde{V}$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化的 $\overline{\mathrm{S}}(m,n,\underline{t})$- 模, 从而也是 $\mathbb{Z}$- 阶化的 $\mathrm{S}(m,n,\underline{t})$- 模.

§2 $\mathrm{H}(m,n,\underline{t})$ 的阶化模

在本节中, 我们设 $\mathbb{F}$ 是特征数 $p>2$ 的代数闭域. 令 $m=2r$ 是正偶数. 设 $G=\left[\begin{smallmatrix} & I_r\\ -I_r & \end{smallmatrix}\right]$, 其中 I_r 是 r 阶单位阵. 令

$$\mathcal{L}=\left\{\left[\begin{smallmatrix}A&B\\C&D\end{smallmatrix}\right]\in\mathrm{pl}(m,n)\ \middle|\ A^{\mathrm{t}}G+GA=0,\ B^{\mathrm{t}}G+C=0,\ D^{\mathrm{t}}+D=0\right\}.\tag{2.1}$$

直接验证可知, $\mathcal{L}$ 是 $\mathrm{pl}(m,n)$ 的子代数. 令

$$Y_1=\{E_{ij'}+\sigma(i)\sigma(j)E_{ji'}\mid 1\le i\le j\le m\},$$

$$Y_2=\{E_{ij}-E_{ji}\mid m+1\le i<j\le s\},$$

$$Y_3=\{E_{ij}-\sigma(i)E_{ji'}\mid 1\le i\le m,\ m+1\le j\le s\},$$

其中 i' 与 $\sigma(i)$ 的定义见第一章 (2.11) 与 (2.12) 式. 由 (2.1) 式可知, $Y_1\cup Y_2\cup Y_3$ 是 $\mathcal{L}$ 的基底. 任取 $T\in\mathcal{L}$, 则 T 可表为 $\sum_{1\le i\le j\le s}l_{ij}T_{ij}$, 其中 $l_{ij}\in\mathbb{F}$,

$$T_{ij}=E_{ij'}+\sigma(i)\sigma(j)(-1)^{\tau(i)\tau(j)+\tau(i)+\tau(j)}E_{ji'}.$$

令 $\psi:\mathrm{H}(m,n,\underline{t})_0\to\mathcal{L}$ 是线性映射, 使得 $\psi(\mathrm{D_H}(x_ix_j))=\sigma(j)(-1)^{\tau(j)}T_{ij}$, 其中 $1\le i\le j\le s$. 容易验证 ψ 是李超代数的同构映射, 所以 $\mathcal{L}\cong\mathrm{H}(m,n,\underline{t})_0$.

以下总设 $n=2q$ 是正偶数. 令

$$P_n=\begin{bmatrix}I_q&\frac{1}{2}I_q\\-\mu I_q&\frac{\mu}{2}I_q\end{bmatrix},\tag{2.2}$$

其中 $\mu\in\mathbb{F}$ 并且 $\mu^2=-1$. 设 $M=P_n^{\mathrm{t}}P_n$, 则 $M=\left[\begin{smallmatrix}0&I_q\\I_q&0\end{smallmatrix}\right]$. 置 $P=\left[\begin{smallmatrix}I_m&0\\0&P_n\end{smallmatrix}\right]$. 令 $\mathcal{L}(P)=\{P^{-1}EP\mid E\in\mathcal{L}\}$, 则 $\mathcal{L}(P)$ 是 $\mathrm{pl}(m,n)$ 的子代数, 并且 $\mathcal{L}(P)\cong\mathcal{L}\cong\mathrm{H}(m,n,\underline{t})_0$. 利

用 (2.1) 式可推得

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(P) \\
\Longleftrightarrow & P\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} P^{-1} \in \mathcal{L} \\
\Longleftrightarrow & \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & P_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & \\ & P_n^{-1} \end{bmatrix} \in \mathcal{L} \\
\Longleftrightarrow & A_1^{\mathrm{t}}G + GA_1 = 0,\ B_1^{\mathrm{t}}G + MC_1 = 0,\ D^{\mathrm{t}}M + MD_1 = 0.
\end{aligned}$$

我们称 $\mathcal{L}(P)$ 是辛 - 正交李超代数. 以下总设 $P = \left[\begin{smallmatrix} I_m & 0 \\ 0 & P_n \end{smallmatrix}\right]$.

引理 2.1 *$\widetilde{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})$ 是 $\mathcal{L}$ 在 $\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$ 中的 P- 伸张.*

证明 令 Ω 是 $\mathcal{L}$ 在 $\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$ 的 P- 伸张. 设 $A = \sum_{i=1}^{s} f_i\mathrm{D}_i \in \mathrm{W}(m,n,\underline{t})_\theta$, 其中 $\theta \in \mathbb{Z}_2$, 则

$$\begin{aligned}
A \in \Omega_\theta \Longleftrightarrow & \widetilde{A} \in \Lambda(m,n,\underline{t}) \otimes \mathcal{L}(P) \\
\Longleftrightarrow & \sum_{i,j=1}^{s} (-1)^{\tau(i)\tau(j)+\tau(j)+\tau(i)\theta}\mathrm{D}_i(f_j) \otimes P^{-1}E_{ij}P \\
& \in \Lambda(m,n,\underline{t}) \otimes \mathcal{L}(P) \\
\Longleftrightarrow & \sum_{i,j=1}^{s} (-1)^{\tau(i)\tau(j)+\tau(j)+\tau(i)\theta}\mathrm{D}_i(f_j) \otimes E_{ij} \\
& \in \Lambda(m,n,\underline{t}) \otimes \mathcal{L} \\
\Longleftrightarrow & \sum_{i,j=1}^{s} (-1)^{\tau(i)\tau(j')+\tau(j')+\tau(i)\theta}\mathrm{D}_i(f_{j'}) \otimes E_{ij'} \\
& \in \Lambda(m,n,\underline{t}) \otimes \mathcal{L} \\
\Longleftrightarrow & \sum_{1\le i\le j\le s} \big((-1)^{\tau(i)\tau(j')+\tau(j')+\tau(i)\theta}\mathrm{D}_i(f_{j'}) \otimes E_{ij'} \\
& + (-1)^{\tau(j)\tau(i')+\tau(i')+\tau(j)\theta}\mathrm{D}_j(f_{i'}) \otimes E_{ji'}\big) \in \Lambda(m,n,\underline{t}) \otimes \mathcal{L} \\
\Longleftrightarrow & \sum_{1\le i\le j\le s} \big((-1)^{\tau(i)\tau(j')+\tau(j')\tau(i)\theta}\mathrm{D}_i(f_{j'}) \\
& \otimes \big(E_{ij'} + \sigma(i)\sigma(j)(-1)^{\tau(i)\tau(j)+\tau(i)+\tau(j)}E_{ji'}\big) \\
& + \big(- \mathrm{D}_i(f_{j'}) + \sigma(i)\sigma(j)(-1)^{\tau(j)\tau(i)+(\tau(j)+\tau(i))\theta}\mathrm{D}_j(f_{i'})\big) \\
& \otimes \sigma(i)\sigma(j)(-1)^{\tau(i)\theta+\tau(i)}E_{ji'}\big) \in \Lambda(m,n,\underline{t}) \otimes \mathcal{L}.
\end{aligned}$$

因为 $E_{ij'} + \sigma(i)\sigma(j)(-1)^{\tau(i)\tau(j)+\tau(i)+\tau(j)}E_{ji'} \in \mathcal{L}$, 所以

$$A \in \Omega_\theta \Longleftrightarrow \sum_{1\le i\le j\le s} \big(- \mathrm{D}_i(f_{j'}) + \sigma(i)\sigma(j)(-1)^{\tau(i)\tau(j)+(\tau(i)+\tau(j))\theta}\mathrm{D}_j(f_{i'})\big)$$

$$\otimes\,\sigma(i)\sigma(j)(-1)^{\tau(i)\theta+\tau(i)}E_{ji'}\in\Lambda(m,n,\underline{t})\otimes\mathcal{L}.$$

当 $1\leq i\leq j\leq s$ 时, $E_{ji'}\notin\mathcal{L}$, 所以

$$A\in\Omega_\theta\Longleftrightarrow-\mathrm{D}_i(f_{j'})+\sigma(i)\sigma(j)(-1)^{\tau(i)\tau(j)+(\tau(i)\tau(j))\theta}\mathrm{D}_j(f_{i'})=0$$

$$\Longleftrightarrow A=\sum_{i=1}^{s}f_i\mathrm{D}_i\in\widetilde{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})_\theta.$$

故 $\Omega=\widetilde{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})$. □

设 V 是 $\mathcal{L}(P)$- 模. 由引理 2.1 与定理 1.3 知, $\widetilde{V}=\Lambda(m,n,\underline{t})\otimes V$ 是 $\widetilde{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})$- 模. 令

$$\overline{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\mathrm{D_H}(f)\mid f\in\Lambda(m,n,\underline{t})\}.$$

由第一章 §2 知 $\overline{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})$ 是 $\mathrm{W}(m,n,\underline{t})$ 的子代数. 我们简记 $\mathrm{H}(m,n,\underline{t})$, $\overline{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})$ 与 $\widetilde{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})$ 分别为 H, $\overline{\mathrm{H}}$ 与 $\widetilde{\mathrm{H}}$. 易见 $\mathrm{H}\subseteq\overline{\mathrm{H}}\subseteq\widetilde{\mathrm{H}}$. 由 §1 知, $\widetilde{V}=\bigoplus_{i=0}^{\xi}\widetilde{V}_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化的 $\widetilde{\mathrm{H}}$- 模, 其中 $\widetilde{V}_i$ 如 (1.11) 式所定义. 于是 $\widetilde{V}$ 也是 $\mathbb{Z}$- 阶化的 $\overline{\mathrm{H}}$- 模与 H- 模, 从而 $\widetilde{V}_0=1\otimes V_0$ 是 H_0- 模. 我们知道, $\mathcal{L}(P)\cong\mathrm{H}_0$. 由 (1.3) 式与定理 1.3 可推得 $\mathcal{L}(P)$-模 V 同构于 H_0- 模 $1\otimes V$.

引理 2.2 设 V 是非平凡的不可约的 $\mathcal{L}(P)$- 模, $\overline{V}_X$ 是 $\widetilde{V}$ 的惟一的不可约 X- 子模, 其中 $X=\overline{\mathrm{H}}$ 或 H. 则

(a) $\overline{V}_X$ 包含 $\widetilde{V}_0$.

(b) $\widetilde{V}_\xi$ 是非平凡的不可约 X_0- 模.

(c) 若 $\widetilde{V}'$ 是 $\widetilde{V}$ 的 X- 子模, 并且 $x^{(\pi)}x^E\otimes v\in\widetilde{V}'$, 其中 $0\neq v\in V$, 则 $\widetilde{V}'=\widetilde{V}$.

(d) 若 $U(\overline{\mathrm{H}})\widetilde{V}_0=\widetilde{V}$, 则 $U(\mathrm{H})\widetilde{V}_0=\widetilde{V}$, 其中 $U(\overline{\mathrm{H}})$ 与 $U(\mathrm{H})$ 分别是 $\overline{\mathrm{H}}$ 与 H 的泛包络代数.

证明 显然, 若 $i\leq\xi-3$, 则 $X_i=\mathrm{H}_i$, 其中 $X=\overline{\mathrm{H}}$ 或 H.

(a) 不失一般性, 可设 $x^{(\alpha)}x^u\otimes v\in\overline{V}_X$, 其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$, $u=<i_1,\cdots,i_r>$. 显然 $\mathrm{D}_i=\sigma(i')(-1)^{\tau(i')}\mathrm{D_H}(x_{i'})\in X$, 其中 $i\in Y=\{1,\cdots,s\}$. 则 $1\otimes v=\lambda\mathrm{D}_1^{\alpha_1}\cdots\mathrm{D}_m^{\alpha_m}\mathrm{D}_{i_1}\cdots\mathrm{D}_{i_r}(x^{(\alpha)}x^u\otimes v)\in\overline{V}_X$, 其中 $\lambda=1$ 或 -1. 因为 V 是不可约的 $\mathcal{L}(P)$- 模, 所以 $1\otimes V$ 是不可约的 X_0- 模. 则 $\widetilde{V}_0=1\otimes V=U(X_0)(1\otimes v)\subseteq\overline{V}_X$, 其中 $U(X_0)$ 是 X_0 的泛包络代数.

(b) 显然, $\widetilde{V}_\xi=x^{(\pi)}x^E\otimes V$. 因为模 V 是非平凡的, 所以 $\widetilde{V}_\xi$ 是非平凡的 X_0- 模. 令 $x^{(\pi)}x^E\otimes V'$ 是 $\widetilde{V}_\xi$ 的非零真子模, 则 $V'\neq0$. 从而 $1\otimes V'$ 是 $1\otimes V$ 的 X_0- 真子模, 所以 V' 是 V 的非零的 $\mathcal{L}(P)$- 真子模. 此与 V 的不可约性矛盾.

(c) 因为 $\widetilde{V}_\xi$ 是不可约的 X_0- 模, 所以

$$U(X_0)(x^{(\pi)}x^E\otimes v)=x^{(\pi)}x^E\otimes V\subseteq\widetilde{V}'.$$

任取 $\alpha \in A(m,\underline{t})$, $u \in B(n)$. 设 $(\beta_1,\cdots,\beta_m) = \pi - \alpha$. 令 $w = \langle j_1,\cdots,j_k\rangle \in B(n)$ 使得 $\{w\} = Y_1 \backslash \{u\}$. 则

$$x^{(\alpha)}x^u \otimes V = \mathrm{D}_1^{\beta_1}\cdots \mathrm{D}_m^{\beta_m}\mathrm{D}_{j_1}\cdots \mathrm{D}_{j_k}(x^{(\pi)}x^E \otimes V) \subseteq \widetilde{V}',$$

所以 $\widetilde{V}' = \widetilde{V}$.

(d) 令 $R = \mathbb{F}(\mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E))$, 则 $\overline{\mathrm{H}} = \mathrm{H} + R$, 并且 $\mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E) \in \overline{\mathrm{H}}_{\xi-2}$. 设 $U(R)^0$ 是 R 生成的 $U(R)$ 的理想, 则 $U(R)^0\widetilde{V} \subseteq V_R := \bigoplus_{i\geq \xi-2}\widetilde{V}_i$. 易见 $\mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E)V_R \subseteq \bigoplus_{i\geq 2(\xi-2)}\widetilde{V}_i = 0$, 并且 $\widetilde{V} = U(\overline{\mathrm{H}})\widetilde{V}_0 = U(\mathrm{H})\widetilde{V}_0 + V_R$.

假设 $U(\mathrm{H})\widetilde{V}_0 \neq \widetilde{V}$, 则 $U(\mathrm{H})\widetilde{V}_0$ 是 $\widetilde{V}$ 的真子模. 我们断言 $(U(\mathrm{H})\widetilde{V}_0)\cap\widetilde{V}_\xi = 0$. 否则, 存在 $0 \neq w \in (U(\mathrm{H})\widetilde{V}_0)\cap\widetilde{V}_\xi$. 因为 $w \in \widetilde{V}_\xi$, 所以可设 $w = x^{(\pi)}x^E\otimes v$. 则 $x^{(\pi)}x^E\otimes v \in U(\mathrm{H})\widetilde{V}_0$. 显然 $U(\mathrm{H})\widetilde{V}_0$ 是 $\widetilde{V}$ 的一个 H- 子模. 由 (c) 知 $U(\mathrm{H})\widetilde{V}_0 = \widetilde{V}$, 所以 $U(\mathrm{H})\widetilde{V}_0$ 不是 $\widetilde{V}$ 的真子模, 此为矛盾. 因此 $(U(\mathrm{H})\widetilde{V_0}) \cap \widetilde{V}_\xi = 0$.

由 (b) 知 $\widetilde{V}_\xi$ 是非平凡的 H_0- 模, 从而存在 $x \in \mathrm{H}_0$, $w \in \widetilde{V}_\xi$, 使得 $xw \neq 0$. 因为 $(U(\mathrm{H})\widetilde{V}_0) \cap \widetilde{V}_\xi = 0$, 所以 $xw \notin U(\mathrm{H})\widetilde{V}_0$. 于是 $\overline{\mathrm{H}}$- 模 $V' := \widetilde{V}/U(\mathrm{H})\widetilde{V}_0$ 是非平凡的. 易见

$$V' = \widetilde{V}/U(\mathrm{H})\widetilde{V}_0 = \big(U(\mathrm{H})\widetilde{V}_0 + V_R\big)/U(\mathrm{H})\widetilde{V}_0 = V_R/U(\mathrm{H})\widetilde{V}_0.$$

因此

$$\mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E)V' = \mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E)V_R/U(\mathrm{H})\widetilde{V}_0 = 0.$$

令 η 是 $\overline{\mathrm{H}}$- 模 V' 所提供的表示, 则 $\mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E) \in \ker\eta$. 由于 $\overline{\mathrm{H}}$ 的任何真理想均不包含 $\mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E)$, 所以 $\ker\eta = \overline{\mathrm{H}}$. 从而 $\overline{\mathrm{H}}$- 模 V' 是平凡的. 此亦为矛盾, 所以 $U(\mathrm{H})\widetilde{V}_0 = \widetilde{V}$. □

命题 2.3 设 V 是不可约的 $\mathcal{L}(P)$- 模, 则 $\widetilde{V}$ 是不可约的 $\overline{\mathrm{H}}$- 模当且仅当 $\widetilde{V}$ 是不可约的 H- 模.

证明 充分性是显然的. 下面证明必要性.

设 $\widetilde{V}$ 是不可约的 $\overline{\mathrm{H}}$- 模. 因为 $U(\overline{\mathrm{H}})\widetilde{V}_0$ 是一个非零的 $\overline{\mathrm{H}}$- 子模, 所以 $U(\overline{\mathrm{H}})\widetilde{V}_0 = \widetilde{V}$. 令 $\overline{V}_{\mathrm{H}}$ 是 $\widetilde{V}$ 的惟一的不可约的 H- 子模. 由引理 2.2 的 (a) 知, $\overline{V}_{\mathrm{H}} \supseteq \widetilde{V}_0$, 从而 $\overline{V}_{\mathrm{H}} \supseteq U(\mathrm{H})\widetilde{V}_0$. 由引理 2.2 的 (d) 知, $U(\mathrm{H})\widetilde{V}_0 = U(\overline{\mathrm{H}})\widetilde{V}_0 = \widetilde{V}$, 所以 $\overline{V}_{\mathrm{H}} \supseteq \widetilde{V}$, 故 $\overline{V}_{\mathrm{H}} = \widetilde{V}$. 这就证明了 $\widetilde{V}$ 是不可约的 H- 模. □

以下总设 V 是具有首权 λ 的不可约 $\mathcal{L}(P)$- 模, 并且记 $\widetilde{V}$ 为 $\widetilde{V}(\lambda)$. 我们讨论怎样的 λ 可使 $\widetilde{V}(\lambda)$ 是不可约的 H- 模. 若 $1 \leq i \leq q = \frac{n}{2}$, 则令 $i^v = i + q$. 设

$$\mathcal{H} = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{h_i \mid i = 1,\cdots,r,m+1,m+2,\cdots,m+q\},$$

其中

$$\begin{aligned} h_i =& E_{ii} - E_{i+1\,i+1} - E_{i'i'} + E_{(i+1)'(i+1)'}, \qquad i = 1,\cdots,r-1,\\ h_r =& E_{rr} - E_{m+1\,m+1} - E_{r'r'} + E_{m+1^v\ m+1^v}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{m+i} =& E_{m+i\ m+i} - E_{m+i+1\ m+i+1} - E_{m+i^v\ m+i^v} \\ & + E_{m+i^v+1\ m+i^v+1}, \qquad i = 1, \cdots, q-1, \\ h_{m+q} =& E_{m+q-1\ m+q-1} + E_{m+q\ m+q} \\ & - E_{m+q^v-1\ m+q^v-1} - E_{m+q^v\ m+q^v}. \end{aligned}$$

我们称 $\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{L}(P)$ 的标准 Cartan 子代数.

令 $\Lambda_1, \Lambda_2 \cdots, \Lambda_s$ 是空间 $\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{E_{11}, E_{22}, \cdots, E_{ss}\}$ 的线性函数, 使得 $\Lambda_i(E_{jj}) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \cdots, s$. 则 $\mathcal{L}(P)$ 关于 $\mathcal{H}$ 的单根系 是

$$\begin{aligned} &\{\Lambda_i - \Lambda_{i+1},\ i = 1, \cdots, r; \quad \Lambda_r - \Lambda_{m-1}; \\ &\Lambda_{m+i} - \Lambda_{m+i+1},\ i = 1, \cdots, q-1; \quad \Lambda_{m+q-1} + \Lambda_{m+q}\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{L}(P)$ 关于 $\mathcal{H}$ 的基本权是

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{i} \Lambda_j, \qquad i = 1, \cdots, r,$$

$$\lambda_{m+i} = \sum_{j=1}^{r} \Lambda_j + \sum_{j=1}^{i} \Lambda_{m+j}, \qquad i = 1, 2, \cdots, q-2,$$

$$\lambda_{m+q-1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{r} \Lambda_j + \sum_{j=1}^{q-1} \Lambda_{m+j} - \Lambda_{m+q}\right),$$

$$\lambda_{m+q} = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{r} \Lambda_j + \sum_{j=1}^{q} \Lambda_{m+j}\right).$$

则 $\lambda_i(h_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \cdots, r, m+1, m+2, \cdots, m+q$. 直接计算可知以下等式成立.

$$P^{-1}(E_{11} - E_{1'1'})P = E_{11} - E_{1'1'}, \tag{2.3}$$

$$P^{-1}(E_{m+i\ m+i^v} - E_{m+i^v\ m+i})P = -\mu(E_{m+i\ m+i} - E_{m+i^v\ m+i^v}), \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} &P^{-1}(E_{1\ m+i} - E_{m+i\ 1'})P \\ &= (E_{1\ m+i} - E_{m+i^v 1'}) + \frac{1}{2}(E_{1\ m+i^v} - E_{m+i\ 1'}), \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} &P^{-1}(E_{1'\ m+i^v} + E_{m+i^v 1})P \\ &= -\mu(E_{1'\ m+i} + E_{m+i^v 1}) + \frac{\mu}{2}(E_{1'\ m+i^v} + E_{m+i\ 1}), \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} &P^{-1}(E_{1\ m+i^v} - E_{m+i^v 1'})P \\ &= \frac{\mu}{2}(E_{1\ m+i^v} - E_{m+i\ 1'}) - \mu(E_{1\ m+i} - E_{m+i^v 1'}), \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} &P^{-1}(E_{1'\ m+i} + E_{m+i\ 1})P \\ &= (E_{1'\ m+i} + E_{m+i^v 1}) + \frac{1}{2}(E_{1'\ m+i^v} + E_{m+i\ 1}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

定理 2.4 设 V 是具有非零首权 λ 的有限维不可约的 $\mathcal{L}(P)$- 模, n 是正偶数. 若 λ 不是基本权 λ_j, $j=1,\cdots,r$, 则 $\widetilde{V}(\lambda)$ 是不可约的 H$(m,n,\underline{t})$- 模.

证明 由命题 2.3, 只需证明当 λ 不是基本权 λ_j 时, $\widetilde{V}(\lambda)$ 是不可约的 $\overline{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})$-模. 设 $\overline{V}$ 是 $\widetilde{V}(\lambda)$ 的惟一的不可约的 $\overline{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})$- 子模, ρ 为 $\mathcal{L}(P)$- 模 V 所提供的表示.

令 $\lambda=\sum_{k=1}^{r}s_k\lambda_k+\sum_{k=1}^{q}s_{m+k}\Lambda_{m+k}$, 其中 s_k, $s_{m+k}\in\mathbb{F}$. 设 V_λ 是首权 λ 的权向量. 因为 $\lambda\neq\lambda_j$, $j=1,\cdots,r$, 所以 λ 只能是以下三种情况之一: $\sum_{k=1}^{r}s_k\Lambda_k\neq\lambda_j$ $(j=1,\cdots,r)$ 并且 $\sum_{k=1}^{r}s_k\Lambda_k\neq 0$; $\lambda=\lambda_j+\sum_{k=1}^{q}s_{m+k}\Lambda_{m+k}$, 其中 $1\leq j\leq r$, 并且某个 $s_{m+k}\neq 0$; $\lambda=\sum_{k=1}^{q}s_{m+k}\Lambda_{m+k}$, 其中某个 $s_{m+k}\neq 0$.

(i) $\sum_{k=1}^{r}s_k\Lambda_k\neq\lambda_j$ $(j=1,\cdots,r)$ 并且 $\sum_{k=1}^{r}s_k\Lambda_k\neq 0$. 令 $w=\widetilde{\rho}\big(\mathrm{D_H}(x^{(\pi)}x^E)\big)(1\otimes v_\lambda)$. 由引理 2.2 知 $1\otimes v_\lambda\in\overline{V}$, 所以 $w\in\overline{V}$. 利用 (1.3) 式与命题 1.1, 直接计算可得

$$
\begin{aligned}
w=&\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sigma(j)x^{(\pi-\varepsilon_j-\varepsilon_k)}x^E\otimes\rho(P^{-1}E_{kj'}P)v_\lambda\\
&+\sum_{k=m+1}^{s}\sum_{j=1}^{m}\sigma(j)(-1)^{k-m-1}x^{(\pi-\varepsilon_j)}x^{E-\langle k\rangle}\otimes\rho(P^{-1}E_{kj'}P)v_\lambda\\
&+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{s}(-1)^{j-m}x^{(\pi-\varepsilon_k)}x^{E-\langle j\rangle}\otimes\rho(P^{-1}E_{kj}P)v_\lambda\\
&+\sum_{k=m+1}^{j}\sum_{j=m+1}^{s}(-1)^{j+k}x^{(\pi)}x^{E-\langle k\rangle-\langle j\rangle}\otimes\rho(P^{-1}E_{kj}P)v_\lambda\\
&+\sum_{k=j+1}^{s}\sum_{j=m+1}^{s}(-1)^{j+k-1}x^{(\pi)}x^{E-\langle j\rangle-\langle k\rangle}\otimes\rho(P^{-1}E_{kj}P)v_\lambda.
\end{aligned}
$$

显然, 当 $i,j\leq m$ 时, $P^{-1}E_{ij}P=E_{ij}$. 令 $\overline{h}_i=E_{ii}-E_{i'i'}$, 其中 $i=1,\cdots,r$. 设 $i\in\{1,\cdots,r\}$. 由计算知

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\rho}\big(\mathrm{D_H}(x^{(2\varepsilon_i+2\varepsilon_{i'})})\big)(w)=&x^{(\pi)}x^E\otimes\big((\lambda(\overline{h}_i))^2-\lambda(\overline{h}_i)\big)v_\lambda\\
=&(s_i^2-s_i)x^{(\pi)}x^E\otimes v_\lambda.
\end{aligned}
$$

若 $s_i\neq 0,1$, 则 $s_i^2-s_i\neq 0$. 所以 $x^{(\pi)}x^E\otimes v_\lambda\in\overline{V}$. 由引理 2.2 的 (c) 知, $\overline{V}=\widetilde{V}(\lambda)$, 从而 $\widetilde{V}(\lambda)$ 是不可约的. 若所有的 s_k 均为 0 或 1, 其中 $k=1,\cdots,r$, 因为 $\sum_{k=1}^{r}s_k\Lambda_k\neq\lambda_j$, 所以存在 $k,l\in\{1,\cdots,r\}$, 使得 $k<l$, $s_k=0$ 与 $s_l=1$. 于是

$$
\widetilde{\rho}\big(\mathrm{D_H}(x_kx_{k'}x_lx_{l'})\big)(w)=2x^{(\pi)}x^E\otimes v_\lambda.
$$

所以 $x^{(\pi)}x^E\otimes v_\lambda\in\overline{V}$, 从而 $\widetilde{V}(\lambda)$ 是不可约的.

(ii) $\lambda=\lambda_j+\sum_{k=1}^{q}s_{m+k}\Lambda_{m+k}$ 或 $\lambda=\sum_{k=1}^{q}s_{m+k}\Lambda_{m+k}$, 并且有某个 $s_{m+i}\neq 0$. 因为 s_1 只能为 0 或 1, 所以 $s_{m+i}(s_1+1)\neq 0$. 由计算知

$$
\widetilde{\rho}\big(\mathrm{D_H}(x_1x_{1'}x_{m+i}x_{m+i^v})\big)(w)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \rho_1\big(- x_{m+i}x_{m+i^v} \otimes P^{-1}(E_{11} - E_{1'1'})P \\
&\quad - x_{1'}x_{m+i^v} \otimes P^{-1}(E_{1\,m+i} - E_{m+i\,1'})P \\
&\quad + x_{1'}x_{m+i} \otimes P^{-1}(E_{1\,m+i^v} - E_{m+i^v 1'})P \\
&\quad - x_1 x_{m+i^v} \otimes P^{-1}(E_{m+i\,1} + E_{1'\,m+i})P \\
&\quad + x_1 x_{m+i} \otimes P^{-1}(E_{m+i^v 1} + E_{1'\,m+i^v})P \\
&\quad - x_1 x_{1'} \otimes P^{-1}(E_{m+i\,m+i^v} - E_{m+i^v\,m+i})P\big)(w) \\
&= x^{(\pi)}x^E \otimes \rho\big(P^{-1}(E_{11} - E_{1'1'})P\big)\rho\big(P^{-1}(E_{m+i\,m+i^v} - E_{m+i^v\,m+i})P\big)v_\lambda \\
&\quad - x^{(\pi)}x^E \otimes \rho\big(P^{-1}(E_{1\,m+i} - E_{m+i\,1'})P\big)\rho\big(P^{-1}(E_{1'\,m+i^v} + E_{m+i^v 1}P\big)v_\lambda \\
&\quad + x^{(\pi)}x^E \otimes \rho\big(P^{-1}(E_{1\,m+i^v} - E_{m+i^v 1'})P\big)\rho\big(P^{-1}(E_{1'\,m+i} - E_{m+i\,1})P\big)v_\lambda \\
&\quad - x^{(\pi)}x^E \otimes \rho\big(P^{-1}(E_{1'\,m+i} + E_{m+i\,1})P\big)\rho\big(P^{-1}(E_{1\,m+i^v} + E_{m+i^v 1'})P\big)v_\lambda \\
&\quad + x^{(\pi)}x^E \otimes \rho\big(P^{-1}(E_{1'\,m+i^v} + E_{m+i^v 1})P\big)\rho\big(P^{-1}(E_{1\,m+i} - E_{m+i\,1})P\big)v_\lambda \\
&\quad + x^{(\pi)}x^E \otimes \rho\big(P^{-1}(E_{m+i\,m+i^v} - E_{m+i^v m+i})P\big)\rho\big(P^{-1}(E_{1\,1} - E_{1'1'})P\big)v_\lambda.
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

因为 $E_{1\,m+i^v} - E_{m+i\,1'}$ 与 $E_{1\,m+i} - E_{m+i^v 1'}$ 分别是属于正根 $\Lambda_1 + \Lambda_{m+i}$ 与 $\Lambda_1 - \Lambda_{m+i}$ 的根向量, 所以

$$
(E_{1\,m+i^v} - E_{m+i\,1'})v_\lambda = (E_{1\,m+i} - E_{m+i^v 1'})v_\lambda = 0. \tag{2.10}
$$

将 (2.3)~(2.8) 与 (2.10) 式代入到 (2.9) 式的右边, 则可得

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\rho}\big(\mathrm{D_H}(x_1 x_{1'} x_{m+i} x_{m+i^v})\big)(w) \\
&= -2\mu x^{(\pi)}x^E \otimes \rho(E_{m+i\,m+i} - E_{m+i^v m+i^v})\rho(E_{11} - E_{1'1'})v_\lambda \\
&\quad - \mu x^{(\pi)}x^E \otimes \rho(E_{1\,m+i} - E_{m+i^v 1'})\rho(E_{1'\,m+i^v} + E_{m+i\,1})v_\lambda \\
&\quad + \mu x^{(\pi)}x^E \otimes \rho(E_{1\,m+i^v} - E_{m+i\,1'})\rho(E_{1'\,m+i} + E_{m+i^v 1})v_\lambda.
\end{aligned}
$$

易见

$$
\begin{aligned}
&\rho(E_{1\,m+i} - E_{m+i^v 1'})\rho(E_{1'\,m+i^v} + E_{m+i\,1})v_\lambda \\
&= \rho([E_{1\,m+i} - E_{m+i^v 1'}, E_{1'\,m+i^v} + E_{m+i\,1}])v_\lambda \\
&= \rho([E_{1\,m+i}, E_{1'\,m+i^v}] + [E_{1\,m+i}, E_{m+i\,1}] \\
&\quad - [E_{m+i^v 1'}, E_{1'\,m+i^v}] - [E_{m+i^v 1'}, E_{m+i\,1}])v_\lambda \\
&= \rho(E_{11} + E_{m+i\,m+i} - E_{m+i^v m+i^v} - E_{1'1'})v_\lambda \\
&= (s_1 + s_{m+i})v_\lambda.
\end{aligned}
$$

同理可得

$$
\rho(E_{1\,m+i^v} - E_{m+i\,1'})\rho(E_{1'\,m+i} + E_{m+i^v 1})v_\lambda = (s_1 - s_{m+i})v_\lambda.
$$

所以我们有

$$\begin{aligned}&\widetilde{\rho}\big(\mathrm{D_H}(x_1x_{1'}x_{m+i}x_{m+i^v})\big)(w)\\=&-2\mu x^{(\pi)}x^E\otimes s_{m+i}s_1v_\lambda-\mu x^{(\pi)}x^E\otimes(s_1+s_{m+i})v_\lambda\\&+\mu x^{(\pi)}x^E\otimes(s_1-s_{m+i})v_\lambda\\=&-2\mu s_{m+2}(s_1+1)x^{(\pi)}x^E\otimes v_\lambda.\end{aligned}$$

因为 $\mu s_{m+1}(s_1+1)\neq 0$, 所以 $x^{(\pi)}x^E\otimes v_\lambda\in\overline{V}$. 由引理 2.2 的 (c) 知, $\overline{V}=\widetilde{V}(\lambda)$. 于是可知 $\widetilde{V}(\lambda)$ 是不可约的 $\overline{\mathrm{H}}(m,n,\underline{t})$- 模, 从而 $\widetilde{V}(\lambda)$ 是不可约的 $\mathrm{H}(m,n,\underline{t})$- 模. 定理得证. □

当 $n=2q+1$ 是奇数时, 用

$$P_n=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&I_q&\frac{1}{2}I_q\\0&-\mu I_q&\frac{\mu}{2}I_q\end{bmatrix}$$

代替 (2.1) 式中的 P_n, 于是可用 $n=2q$ 时的方法讨论 $\widetilde{V}(\lambda)$ 的不可约性.

§3 形式向量场的一般与特殊李超代数

我们知道, 文献 [29] 完成了特征零域上的无限维线性紧致单李超代数的分类. 本节讨论了其中两类重要的无限维 Cartan 型李超代数 $\overline{\mathrm{W}}$ 与 $\overline{\mathrm{S}}$ 的不变子代数、自然滤过与自同构.

本节总设 $\mathbb{F}$ 是特征数为零的域. 令 $\mathrm{P}(m)=\mathbb{F}[[x_1,\cdots,x_m]]$ 为 $\mathbb{F}$ 上 m 个变元的形式幂级数环. 若 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\in\mathbb{N}_0^m$, 则简记 $\mathrm{P}(m)$ 中的单项式 $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_m^{\alpha_m}$ 为 $x^{(\alpha)}$. 仍设 $\Lambda(n)$ 为 $\mathbb{F}$ 上 n 个变元 $x_{m+1},\cdots,x_s$ 的外代数, 其中 $s=m+n$. 令 $\overline{\Lambda}(m,n)=\mathrm{P}(m)\otimes\Lambda(n)$, 则 $\overline{\Lambda}(m,n)$ 是非交换的线性紧致拓扑超代数, $\{(\overline{\Lambda}_1)^k\}_{k\geq 1}$ 构成了零点的基本邻域系, 其中 $\overline{\Lambda}_1$ 是由 $\{x_1,\cdots,x_s\}$ 生成的 $\overline{\Lambda}(m,n)$ 的理想. 为简便, 我们记 $\overline{\Lambda}(m,n)$ 为 $\mathcal{U}$. 本节仍设 $m,n\geq 2$. 若 $f\in\mathrm{P}(m)$, $g\in\Lambda(n)$, 我们也简记 $\mathcal{U}$ 中的元素 $f\otimes g$ 为 fg.

若 $i\in\mathbb{N}_0$, 则令 $\mathcal{U}_{[i]}=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(\alpha)}x^u\mid|\alpha|+|u|=i\}$. 于是 $\mathcal{U}_{[i]}$ 是 $\mathcal{U}$ 的有限维子空间, 并且 $\mathcal{U}_{[i]}\mathcal{U}_{[j]}\subseteq\mathcal{U}_{[i+j]}$, $\forall i,j\in\mathbb{N}_0$. 任取 $y\in\mathcal{U}$, 则 y 可惟一地表为 $y=\sum_{i=0}^{\infty}y_i$, 其中 $y_i\in\mathcal{U}_{[i]}$. 因为拓扑代数 $\mathcal{U}$ 的加法是连续的, 所以这里允许无限个非零元素 x_i 的和. 于是 $\mathcal{U}=\sum_{i\geq 0}\mathcal{U}_{[i]}$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化超代数 (若 $i<0$, 则约定 $\mathcal{U}_{[i]}=0$). 令 $\mathcal{U}_j=\sum_{i\geq j}\mathcal{U}_{[i]}$, 则 $\{\mathcal{U}\}_{i\geq 0}$ 给出了 $\mathcal{U}$ 的一个滤过结构. 容易证明, $\mathcal{U}_j=(\overline{\Lambda}_1)^j$, $j\in\mathbb{N}_0$.

设 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 是对变元 x_i 的连续超导子, $i\in Y=\{1,\cdots,s\}$. 我们简记 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 为 ∂_i. 令 $\mathrm{der}\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{U}$ 的所有连续超导子构成的李超代数. 令

$$\overline{\mathrm{W}}(m,n)=\left\{\sum_{i=1}^{s}f_i\partial_i\,\middle|\,f_i\in\mathcal{U},\ i\in Y\right\},$$

则 $\overline{\mathrm{W}}(m,n)$ 是 $\mathrm{der}\mathcal{U}$ 的无限维子代数. 由几何意义, 仿文献 [29] 称 $\overline{\mathrm{W}}(m,n)$ 为形式向量场的一般李超代数(general Lie superalgebra of formal vectorfields). 我们简记 $\overline{\mathrm{W}}(m,n)$ 为 $\overline{\mathrm{W}}$. 令

$$\overline{\mathrm{W}}_{[i]} = \mathrm{span}_{\mathbf{F}}\{f\partial_j \mid f \in \mathcal{U}_{[i+1]},\ i = 1,\cdots,s\},$$

则 $\overline{\mathrm{W}} = \sum_{i\geq -1}\overline{\mathrm{W}}_{[i]}$ 是单的 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数. 设 $\overline{\mathrm{W}}_j = \sum_{i\geq j}\overline{\mathrm{W}}_{[i]}$, 则 $\{\overline{\mathrm{W}}_j\}_{j\geq -1}$ 给出了 $\overline{\mathrm{W}}$ 的一个滤过, 称之为自然滤过. 进而 $\overline{\mathrm{W}}$ 是一个线性紧致拓扑李超代数, $\{\overline{\mathrm{W}}_j\}_{j\geq -1}$ 是零点的基本邻域系.

若 $D = \sum_{i=1}^{s} f_i\mathrm{D}_i \in \overline{\mathrm{W}}$, 则 $\mathrm{div}\,D = \sum_{i=1}^{s}(-1)^{\tau(i)\mathrm{d}(f_i)}\partial_i(f_i)$. 设 $\overline{\mathrm{S}}(m,n) = \{D \in \overline{\mathrm{W}} \mid \mathrm{div}\,D = 0\}$, 则 $\overline{\mathrm{S}}(m,n)$ 是 $\overline{\mathrm{W}}$ 的单子代数, 称之为形式向量场的特殊李超代数, 并简记 $\overline{\mathrm{S}}(m,n)$ 为 $\overline{\mathrm{S}}$. 设

$$\mathrm{D}_{ij}(f) = (-1)^{\tau(i)\tau(j)}\partial_i(f)\partial_j - (-1)^{(\tau(i)+\tau(j))\mathrm{d}(f)}\partial_j(f)\partial_i, \quad \forall i,j \in Y.$$

由第五章引理 2.1 可知

$$\overline{\mathrm{S}} = \mathrm{span}_{\mathbf{F}}\{\mathrm{D}_{ij}(f) \mid f \in \mathcal{U},\ i,j \in Y\}.$$

易见 $\overline{\mathrm{W}}$ 的 $\mathbb{Z}$- 阶化诱导了 $\overline{\mathrm{S}}$ 的一个 $\mathbb{Z}$- 阶化, 使得 $\overline{\mathrm{S}} = \sum_{i\geq -1}\overline{\mathrm{S}}_{[i]}$ 是一个 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数, 其中

$$\overline{\mathrm{S}}_{[i]} = \mathrm{span}_{\mathbf{F}}\{\mathrm{D}_{kl}(f) \mid f \in \mathcal{U}_{[i+2]},\ k,l \in Y\},$$

并且 $\overline{\mathrm{S}}$ 继承了 $\overline{\mathrm{W}}$ 的滤过结构与拓扑结构, 从而 $\overline{\mathrm{S}}$ 也是线性紧致拓扑李超代数.

在本节中, L 表示李超代数 $\overline{\mathrm{W}}$ 或 $\overline{\mathrm{S}}$, 则 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$. 设 $\theta \in \mathbb{Z}_2$, 若 $L = \overline{\mathrm{W}}$, 则

$$L_\theta = \mathrm{span}_{\mathbf{F}}\{f\partial_j \mid f \in \mathcal{U},\ i \in Y,\ \mathrm{d}(f) + \tau(j) = \theta\}.$$

若 $L = \overline{\mathrm{S}}$, 则

$$L_\theta = \mathrm{span}_{\mathbf{F}}\{\mathrm{D}_{ij}(f) \mid f \in \mathcal{U},\ i,j \in Y,\ \mathrm{d}(f) + \tau(i) + \tau(j) = \theta\}.$$

引理 3.1 设 $0 \neq D \in L_{[-1]}\bigcap L_{\bar{0}}$, 则 $D(\mathcal{U}_{[i]}) = \mathcal{U}_{[i-1]}$, $\forall i \in \mathbb{N}$. 从而 $D(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.

证明 可设 $D = \sum_{j=1}^{m} c_j\partial_j$, 其中 $c_j \in \mathbb{F}$. 因 $D \neq 0$, 所以 $c_1,\ldots,c_m$ 不全为零. 令 $d_{1j} = c_j$, $\forall\, j \in Y_0$. 则存在 $d_{ij} \in \mathbb{F}$, 其中 $i,j = 2,\ldots,m$, 使得 $[d_{ij}]_{1\leq i,j\leq m}$ 是 m 阶可逆矩阵. 显然 $[1,0,\ldots,0][d_{ij}] = [c_1,c_2,\ldots,c_m]$. 设 $[a_{ij}] = [d_{ij}]^{-1}$, 则 $[c_1,c_2,\ldots,c_m][a_{ij}] = [1,0,\ldots,0]$.

令 $y_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i, \forall\, j \in Y_0$; $y_j = x_j, \forall\, j \in Y_1$. 则

$$D(y_1) = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i1} = 1,\ D(y_j) = 0,\ j = 2,\ldots,m, \tag{3.1}$$

并且 $x_j = \sum_{i=1}^{m} d_{ij}y_i$, $\forall\, j \in Y_0$; $x_j = y_j, \forall\, j \in Y_1$. 若 $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$, $u = \langle i_1,\cdots,i_k\rangle \in B(n)$, 仍记

$$y^{(\alpha)}y^u = y_1^{\alpha_1}\ldots y_m^{\alpha_m}y_{i_1}\ldots y_{i_k}, \tag{3.2}$$

则对任意 $j\in\mathbb{N}_0$, 有 $\mathcal{U}_{[j]}=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{y^{(\alpha)}y^u\mid\alpha\in\mathbb{N}_0^m,\ u\in B(n),\ |\alpha|+|u|=j\}$. 设 $y^{(\alpha)}y^u\in\mathcal{U}_{[i-1]}$. 因为 $\alpha_1\in\mathbb{N}_0,\mathrm{char}\mathbb{F}=0$, 所以 $\alpha_1+1\neq 0$. 显然 $(\alpha_1+1)^{-1}y_1y^{(\alpha)}y^u\in\mathcal{U}_{[i]}$. 由 (3.1) 式知, $D((\alpha_1+1)^{-1}y_1y^{(\alpha)}y^u)=y^{(\alpha)}y^u$. 于是可推得 $D(\mathcal{U}_{[i]})\supseteq\mathcal{U}_{[i-1]}$. 因为 $D\in L_{[-1]}$, 所以 $D(\mathcal{U}_{[i]})\subseteq\mathcal{U}_{[i-1]}$. 因此 $D(\mathcal{U}_{[i]})=\mathcal{U}_{[i-1]},\forall\ i\in\mathbb{N}$. 任取 $z=\sum_{i=0}^{\infty}z_i\in\mathcal{U}$, 其中 $z_i\in\mathcal{U}_{[i]}$. 因为 $\mathcal{U}_{[i]}=D(\mathcal{U}_{[i+1]})$, 故可设 $z_i=D(h_{i+1})$, 其中 $h_{i+1}\in\mathcal{U}_{[i+1]}$, $\forall\ i\in\mathbb{N}$. 因 D 是连续的, 故 $z=\sum_{i=0}^{\infty}D(h_{i+1})=D(\sum_{i=0}^{\infty}h_{i+1})\in D(\mathcal{U})$. 于是 $\mathcal{U}=D(\mathcal{U})$. □

引理 3.2 设 $0\neq D\in L_{[-1]}\cap L_{\bar{0}}$, 则 $[D,L_{[i]}]=L_{[i-1]},\forall\ i\in\mathbb{N}_0$.

证明 显然 $[D,L_{[i]}]\subseteq L_{[i-1]}$. 若 $L=\overline{W}$, 设 fD_j 是 $L_{[i-1]}$ 的任一基元素, 则 $f\in\mathcal{U}_{[i]}$. 由引理 3.1, 存在 $g\in\mathcal{U}_{[i+1]}$, 使得 $D(g)=f$. 显然 $g\partial_j\in L_{[i]}$, 并且 $[D,g\partial_j]=f\partial_j$, 于是 $L_{[i-1]}\subseteq[D,L_{[i]}]$. 若 $L=\overline{S}$, 设 $D_{kl}(f)\in L_{[i-1]}$. 由等式 $[D,D_{kl}(f)]=D_{kl}(Df)$ 以及引理 3.1, 同理推得 $L_{[i-1]}\subseteq[D,L_{[i]}]$. 引理得证. □

设 $D\in L$. 若 $D\neq 0$, 易见, 存在 $i\in\mathbb{N}$, 使得 $D\notin L_i$, 故 $\cap_{i=0}^{\infty}L_i=0$.

引理 3.3 设 $0\neq D\in(L_{-1}\cap L_{\bar{0}})\backslash L_0$, 则 $[D,L]=L$.

证明 设 $D=\sum_{i=-1}^{\infty}D_i$, 其中 $D_i\in L_{[i]}$. 设 $E=\sum_{i=-1}^{\infty}E_i$ 是 L 的任一元素, 其中 $E_i\in L_{[i]}$. 由引理 3.2, 我们可归纳地取得 $G_j\in L_{[j]},\forall\ j\in\mathbb{N}_0$, 使得

$$[D_{-1},G_0]=E_{-1},\quad [D_{-1},G_j]=E_{j-1}-\sum_{i=0}^{j-1}[D_i,G_{j-1-i}],\ \forall\ j\in\mathbb{N}.$$

任取 $l\in\mathbb{N}_0$, 则有

(i)
$$\begin{aligned}\left[D_{-1},\sum_{j=0}^{l}G_j\right]&=[D_{-1},G_0]+\sum_{j=1}^{l-1}[G_{-1},G_j]\\&=E_{-1}+\sum_{i=1}^{l}\left(E_{j-1}-\sum_{i=0}^{j-1}[D_i,G_{j-1-i}]\right)\\&=\sum_{j=1}^{l-1}E_j-\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=0}^{j}[D_i,G_{j-1-i}]=\sum_{j=-1}^{l-1}E_j-\sum_{j=0}^{l-1}\sum_{i=0}^{j}[D_i,G_{j-i}]\\&=\sum_{j=-1}^{l-1}E_j-\sum_{0\le i+j\le l-1}[D_i,G_j].\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}\left[\sum_{i=0}^{\infty}D_i,\sum_{j=0}^{l}G_j\right]&=\left[\sum_{i=0}^{l-1}D_i,\sum_{j=0}^{l}G_j\right]+\left[\sum_{i=l}^{\infty}D_i,\sum_{j=0}^{l}G_j\right]\\&=\sum_{i,j=0}^{l-1}[D_i,G_j]+\sum_{i=0}^{l-1}[D_i,G_l]+\left[\sum_{i=l}^{\infty}D_i,\sum_{j=0}^{l}G_j\right]\\&=\sum_{0\le i+j\le l-1}[D_i,G_j]+B,\end{aligned}$$

其中 $B \in L_l = \cap_{i=0}^{l} L_i$. 由 (i) 与 (ii) 知

$$\left[D, \sum_{j=0}^{l} G_j\right] = \left[D_{-1}, \sum_{j=0}^{l} G_j\right] + \left[\sum_{i=0}^{\infty} D_i, \sum_{j=0}^{l} G_j\right] = \sum_{j=-1}^{l-1} E_j + B.$$

所以, 我们有 $[D, \sum_{j=0}^{l} G_j] \equiv \sum_{j=-1}^{l-1} E_j \pmod{\cap_{i=0}^{l} L_i}$. 设 $G = \sum_{j=0}^{\infty} G_j$, 则 $[D, G] = [D, \sum_{j=0}^{\infty} G_j] \equiv \sum_{j=0}^{\infty} E_j \pmod{\cap_{i=0}^{\infty} L_i}$. 由 $\cap_{i=0}^{\infty} L_i = 0$ 知,$[D, G] = E$, 于是 $L \subseteq [D, L]$. 故 $[D, L] = L$. □

设 $D \in L$. 我们知道, 若存在正整数 n, 使得 $(\mathrm{ad}D)^n = 0$, 则 D 称为 L 的 ad- 幂零元. 下面给出 ad- 拟幂零元的定义.

定义 3.4 设 $D \in L$, 若对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $\lambda_n \in \mathbb{N}$, 使得对任意 $t > \lambda_n$, 均有 $(\mathrm{ad}D)^t(L) \subseteq L_n$, 则称 D 是 L 的 ad - 拟幂零元.

显然 ad - 幂零元是 ad - 拟幂零元; 特别地, 对任意 $i \in Y_1$, ∂_i 是 L 的 ad - 拟幂零元.

设 $\mathcal{T}$ 是 L 的子集. 令 $\mathrm{qn}_L(\mathcal{T}) = \{D \in \mathcal{T} \mid D$是 L 的 ad - 拟幂零元$\}$. 我们简记 $\mathrm{qn}_L(\mathcal{T})$ 为 $\mathrm{qn}(\mathcal{T})$. 令 $\mathrm{Qn}(\mathcal{T})$ 为 $\mathrm{qn}(\mathcal{T})$ 生成的 L 的子代数. 由定义可直接推得 $L_1 \subseteq \mathrm{qn}(L)$.

引理 3.5 $\mathrm{qn}(L_{\bar{0}}) \subseteq L_0 \bigcap L_{\bar{0}}$.

证明 设 $D \in \mathrm{qn}(L_{\bar{0}})$. 可设 $D = D_{-1} + D_0$, 其中 $D_{-1} \in L_{[-1]} \bigcap L_{\bar{0}}$, $D_0 \in L_0 \bigcap L_{\bar{0}}$. 若 $D_{-1} \neq 0$, 由引理 3.3 知 $D \notin \mathrm{qn}(L)$. 此为矛盾, 故 $D_{-1} = 0$. 所以 $D \in L_0 \bigcap L_{\bar{0}}$. □

引理 3.6 设 $D = D_0 + D_1 \in \mathrm{qn}(L_0)$, 其中 $D_0 \in L_{[0]}, D_1 \in L_1$. 则 $D_0 \in \mathrm{qn}(L_{[0]})$.

证明 假设 $D_0 \notin \mathrm{qn}(L_{[0]})$, 则存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得对任意 $\lambda \in \mathbb{N}$, 总有一个大于 λ 的正整数 t 与 L 中的一个元素 E, 满足 $(\mathrm{ad}D_0)^t(E) \notin L_n$. 可设 $E \in L_{[i]}$ 是 $\mathbf{Z}$ - 齐次元素. 由

$$(\mathrm{ad}D)^t(E) \equiv (\mathrm{ad}D_0)^t(E) \pmod{L_{i+1}}$$

可推得 $(\mathrm{ad}D)^t(E) \notin L_n$. 因此 D 不是 ad- 拟幂零元, 此为矛盾. □

引理 3.7 下列结论成立:

(i) $\mathrm{Qn}(L_{\bar{0}}) = \mathrm{Qn}(L_{[0]} \cap L_{\bar{0}}) + L_1 \cap L_{\bar{0}}$;

(ii) $\mathrm{Qn}(L_{\bar{0}}) \subseteq L_0 \cap L_{\bar{0}}$.

证明 (i) 由 $L_1 \subseteq \mathrm{qn}(L)$ 知,$L_1 \cap L_{\bar{0}} \subseteq \mathrm{qn}(L_{\bar{0}}) \subseteq \mathrm{Qn}(L_{\bar{0}})$. 所以 $\mathrm{Qn}(L_{[0]} \cap L_{\bar{0}})) + L_1 \cap L_{\bar{0}} \subseteq \mathrm{Qn}(L_{\bar{0}})$. 反之, 设 $D \in \mathrm{qn}(L_{\bar{0}})$, 由引理 3.5 知, $D \in L_0 \cap L_{\bar{0}}$. 置 $D = D_0 + D_1$, 其中 $D_0 \in L_{[0]} \cap L_{\bar{0}}$, $D_1 \in L_1 \cap L_{\bar{0}}$. 由引理 3.6 知, $D_0 \in \mathrm{qn}(L_{[0]} \cap L_{\bar{0}}) \subseteq \mathrm{Qn}(L_{[0]} \cap L_{\bar{0}})$, 则

$$D = D_0 + D_1 \in \mathrm{Qn}(L_{[0]} \cap L_{\bar{0}}) + L_1 \cap L_{\bar{0}}.$$

因此

$$\mathrm{qn}(L_{\bar{0}}) \subseteq \mathrm{Qn}(L_{[0]} \cap L_{\bar{0}}) + L_1 \cap L_{\bar{0}}. \tag{3.3}$$

因为 (3.3) 式右端是 $L_{\bar{0}}$ 的子代数, 所以 $\mathrm{Qn}(L_{\bar{0}}) \subseteq \mathrm{Qn}(L_{[0]} \cap L_{\bar{0}}) + L_1 \cap L_{\bar{0}}$. 于是 (i) 得证. 利用 (i) 可直接推得 (ii). □

引理 3.8 设 $i, j \in Y$, $i \neq j$. 则 $x_i\partial_j \in \mathrm{qn}(L)$.

证明 取 $r \in Y\backslash\{i,j\}$, 则 $x_i\partial_j = (-1)^{\tau(r)\tau(j)}D_{rj}(x_rx_i)$, 从而 $x_i\partial_j \in L$. 因为 $\mathrm{qn}_{\overline{W}}(L) \subseteq \mathrm{qn}_L(L) = \mathrm{qn}(L)$, 所以只需证明 $x_i\partial_j \in \mathrm{qn}_{\overline{W}}(L)$. 不妨设 $i < j$. 任取 $n \in \mathbb{N}$, 置 $\lambda_n = n+1$. 任取 $t > \lambda_n$, 往证 $(\mathrm{ad}x_i\partial_j)^t(\overline{W}) \subseteq \overline{W}_n$. 任取 $E = x^{(\alpha)}x^u\partial_k \in \overline{W}$, 其中 $\alpha \in \mathbb{N}_0^m, u \in B(n), k \in Y$. 可设 $E \in \overline{W}_{[l]}$. 若 $l \geq n$, 由 $x_i\partial_j \in \overline{W}_{[0]}$ 知, $(\mathrm{ad}x_i\partial_j)^t(E) \in \overline{W}_{[l]} \subseteq \overline{W}_n$. 若 $l < n$, 由 $E \in \overline{W}_{[l]}$ 知 $|\alpha| < n+1$. 由 $t > n+1$ 知, $\partial_j^{t-1}(x^{(\alpha)}) = \partial_j^t(x^{(\alpha)}) = 0$. 我们分以下情形讨论

① $j \in Y_0$. 若 $k \neq i$, 则 $(\mathrm{ad}(x_i\partial_j))^t(E) = x_i^t\partial_j^t(x^{(\alpha)})x^u = 0$. 若 $k = i$, 则 $(\mathrm{ad}(x_i\partial_j))^t(E) = x_i^t\partial_j^t(x^{(\alpha)})x^u\partial_i - tx^{t-1}\partial_j^{t-1}(x^{(\alpha)})x^u\partial_j = 0$.

② $j \in Y_1$. 此时 $\partial_j^2(x^u) = 0$. 因为 $t > n+1$, 故 $t \geq 3$. 若 $k \neq i$, 则

$$(\mathrm{ad}(x_i\partial_j))^t(E) = (\mathrm{ad}(x_i\partial_j))^{t-2}(x_i^2x^{(\alpha)}\partial_j^2(x^u)\partial_k) = 0.$$

若 $k = i$, 则 $(\mathrm{ad}(x_i\partial_j))^t(E) = l(\mathrm{ad}(x_i\partial_j))^{t-3}(x_i^2x^{(\alpha)}\partial_j^2(x^u)\partial_j) = 0$, 其中 $l = 1$ 或 -1. 综上知 $(\mathrm{ad}(x_i\partial_j))^t(x^{(\alpha)}x^uD_k) \in \overline{W}_n$. 任取 $f_k \in \mathcal{U}$, 可设 $f_k = \sum_{\alpha,u} c_{\alpha,u}x^{(\alpha)}x^u$ (可以是无限和), 其中 $c_{\alpha,u} \in \mathbb{F}$. 因为 $(\mathrm{ad}(x_i\partial_j))^t$ 是连续的, 故

$$(\mathrm{ad}(x_i\partial_j))^t(f_kD_k) = \sum_{\alpha,u}(\mathrm{ad}(x_i\partial_j))^t(c_{\alpha,u}x^{(\alpha)}x^uD_k) \in \overline{W}_n.$$

由 $\overline{W} = \{\sum_{k\in Y} f_kD_k \mid f_k \in \mathcal{U}\}$ 知, $(\mathrm{ad}(x_i\partial_j))^t(\overline{W}) \subseteq \overline{W}_n$. 因此 $x_i\partial_j \in \mathrm{qn}_{\overline{W}}(L)$. □

设 ρ 是 $L_{[0]}$- 模 $L_{[-1]}$ 所提供的表示. 设 $D = \sum_{i,j=1}^s a_{ij}x_i\partial_j \in L_{[0]}$, 其中 $a_{ij} \in \mathbb{F}$, 则 $\rho(D) = \mathrm{ad}D$ 在 $L_{[-1]}$ 的基底 $\{\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_s\}$ 上的矩阵是

$$A = [-(-1)^{\tau(i)+\tau(i)\tau(j)}a_{ij}]^t.$$

若 $\rho(D)$ 不是幂零阵, 由定义 1 知 $D \notin \mathrm{qn}(L)$. 以下我们将 $\rho(D)$ 等同于它的矩阵 A. 直接验证可知

$$\rho(\overline{W}_{[0]} \cap \overline{W}_{\overline{0}}) = \mathrm{pl}(m,n)_{\overline{0}},\ \rho(\overline{S}_{[0]} \cap \overline{S}_{\overline{0}}) = \mathrm{spl}(m,n)_{\overline{0}}, \tag{3.4}$$

其中 $\mathrm{pl}(m,n)$ 与 $\mathrm{spl}(m,n)$ 分别为 $\mathbb{F}$ 上 $m+n$ 阶矩阵的一般线性李超代数与特殊线性李超代数.

引理 3.9 下列结论成立:

(i) $\rho(\mathrm{qn}(L_{[0]} \cap L_{\overline{0}})) \subseteq \mathrm{spl}(m,n)_{\overline{0}}$;

(ii) $\rho(\mathrm{Qn}(L_{[0]} \cap L_{\overline{0}})) = \mathrm{spl}(m,n)_{\overline{0}}$.

证明 (i) 设 $D \in \mathrm{qn}(L_{[0]} \cap L_{\overline{0}})$, n 是任一正整数, 则有正整数 t, 使得 $(\mathrm{ad}D)^t(L) \subseteq L_n$. 特别地,$(\mathrm{ad}D)^t(L_{[-1]}) \subseteq L_n$. 因为 $D \in L_{[0]}$, 所以 $(\mathrm{ad}D)^t(L_{[-1]}) \subseteq L_{[-1]} \cap L_n = 0$. 于是 $(\rho(D))^t = 0$, 即 $\rho(D)$ 是幂零阵. 因 $D \in L_{[0]} \cap L_{\overline{0}}$, 故 $\rho(D) = \mathrm{diag}(A_1, A_2)$. 从而 A_1 与 A_2 分别是 m 阶与 n 阶幂零阵, 所以 $\mathrm{tr}(A_1) = \mathrm{tr}(A_2) = 0$. 故 $\mathrm{str}(\rho(D)) = 0$. 因此 $\rho(D) \in \mathrm{spl}(m,n)_{\overline{0}}$.

(ii) 令 $R = \{x_i\partial_j \mid i,j \in Y, i \neq j, \tau(i) = \tau(j)\}$, 则 $R \subseteq L_{[0]} \cap L_{\overline{0}}$. 由引理 3.8,$R \subseteq \mathrm{qn}(L_{[0]} \cap L_{\overline{0}})$, 所以 $\rho(R) \subseteq \rho(\mathrm{qn}(L_{[0]} \cap L_{\overline{0}}))$. 因为 $\rho(R)$ 生成 $\mathrm{spl}(m,n)_{\overline{0}}$, 所以 $\mathrm{spl}(m,n)_{\overline{0}} \subseteq \rho(\mathrm{Qn}(L_{[0]} \cap L_{\overline{0}}))$. 由 (i) 知 $\rho(\mathrm{Qn}(L_{[0]} \cap L_{\overline{0}})) \subseteq \mathrm{spl}(m,n)_{\overline{0}}$, 所以 (ii) 成立. □

命题 3.10 $L_0 \cap L_{\overline{0}}$ 是 L 的不变子代数.

证明 设 $R = \mathrm{pl}(m,n)_{\overline{0}}$ 或 $\mathrm{spl}(m,n)_{\overline{0}}$, 则 $[R, \mathrm{spl}(m,n)_{\overline{0}}] = \mathrm{spl}(m,n)_{\overline{0}}$. 由引理 3.9 (ii) 与 (3.4) 式知

$$[\rho(L_{[0]} \cap L_{\overline{0}}), \rho(\mathrm{Qn}(L_{[0]} \cap L_{\overline{0}}))] = \rho(\mathrm{Qn}(L_{[0]} \cap L_{\overline{0}}))).$$

因为 ρ 是忠实的, 所以 $[L_{[0]} \cap L_{\overline{0}}\ , \mathrm{Qn}(L_{[0]} \cap L_{\overline{0}})] = \mathrm{Qn}(L_{[0]} \cap L_{\overline{0}})$. 由引理 3.7 (i) 可得:

$$\begin{aligned}[L_0 \cap L_{\overline{0}}\ , \mathrm{Qn}(L_{\overline{0}})] &= [L_0 \cap L_{\overline{0}} + L_1 \cap L_{\overline{0}}\ , \mathrm{Qn}(L_{[0]} \cap L_{\overline{0}}) + L_1 \cap L_{\overline{0}}] \\ &\subseteq [L_{[0]} \cap L_{\overline{0}}\ , \mathrm{Qn}(L_{[0]} \cap L_{\overline{0}})] + L_1 \cap L_{\overline{0}} \\ &\subseteq \mathrm{Qn}(L_{[0]} \cap L_{\overline{0}}) + L_1 \cap L_{\overline{0}} = \mathrm{Qn}(L_{\overline{0}}),\end{aligned}$$

所以 $L_0 \cap L_{\overline{0}} \subseteq \mathrm{Nor}_{L_{\overline{0}}}(\mathrm{Qn}(L_{\overline{0}}))$. 反之, 设 $D \in \mathrm{Nor}_{L_{\overline{0}}}(\mathrm{Qn}(L_{\overline{0}}))$, 则 $D \in L_{\overline{0}}$. 令 $D = D_{-1} + D_0$, 其中 $D_{-1} \in L_{[-1]} \cap L_{\overline{0}}$, $D_0 \in L_0 \cap L_{\overline{0}}$. 可设 $D_{-1} = \sum_{k=1}^m a_k\partial_k$, $a_k \in \mathbb{F}$. 对任意 $k \in Y_0$, 取 $j_k \in Y_0 \backslash \{k\}$. 由引理 3.8, $x_k\partial_{j_k} \in \mathrm{qn}(L_{\overline{0}}) \subseteq \mathrm{Qn}(L_{\overline{0}})$, 则 $[D, x_k\partial_{j_k}] \in \mathrm{Qn}(L_{\overline{0}})$. 由引理 3.7 (ii) 知 $[D, x_k\partial_{j_k}] \in L_0 \cap L_{\overline{0}}$. 因为 $[D, x_k\partial_{j_k}] = a_k\partial_{j_k} + [D_0, x_k\partial_{j_k}]$, 所以 $a_k = 0, \forall\ k \in Y_0$. 于是 $D_{-1} = 0$, 这样 $D = D_0 \in L_0 \cap L_{\overline{0}}$. 这就证明了 $\mathrm{Nor}_{L_{\overline{0}}}(\mathrm{Qn}(L_{\overline{0}})) \subseteq L_0 \cap L_{\overline{0}}$. 因此 $L_0 \cap L_{\overline{0}} = \mathrm{Nor}_{L_{\overline{0}}}(\mathrm{Qn}(L_{\overline{0}}))$. 此式右端是不变的, 所以 $L_0 \cap L_{\overline{0}}$ 是不变的. □

命题 3.11 $L_1 \cap L_{\overline{0}}$ 是 L 的不变子代数.

证明 设 $\mathcal{T} = \mathrm{qn}(L_0 \cap L_{\overline{0}})$, $\Omega = \{D \in \mathcal{T} \mid [D, L_0 \cap L_{\overline{0}}] \subseteq \mathcal{T}\}$. 由命题 3.10 知 Ω 是 L 的不变子集, 我们往证 $L_1 \cap L_{\overline{0}} = \Omega$. 由 $L_1 \subseteq \mathrm{qn}(L)$ 知,

$$[L_1 \cap L_{\overline{0}}, L_0 \cap L_{\overline{0}}] \subseteq L_1 \cap L_{\overline{0}} \subseteq (L_0 \cap L_{\overline{0}}) \cap \mathrm{qn}(L) = \mathrm{qn}(L_0 \cap L_{\overline{0}}) = \mathcal{T},$$

因此 $L_1 \cap L_{\overline{0}} \subseteq \Omega$. 反之, 令 $D \in \Omega$. 可设 $D = D_0 + D_1$, 其中 $D_0 \in L_{[0]} \cap L_{\overline{0}}$, $D_1 \in L_1 \cap L_{\overline{0}}$, 则 $D_0 = D_0' + D_0''$, 其中 $D_0' = \sum_{i,j \in Y_0} a_{ij}x_i\partial_j$, $D_0'' = \sum_{i,j \in Y_1} a_{ij}x_i\partial_j$.

假设 $D_0' \neq 0$. 令 $l = \min\{i \mid a_{ij} \neq 0, i,j \in Y_0\}$, $t = \min\{j \mid a_{ij} \neq 0, i,j \in Y_0\}$.

(i) $l \leq t$ 的情形. 令 $k = \max\{j \mid a_{lj} \neq 0, j \in Y_0\}$. 显然 $l \leq t \leq k$, $a_{lk} \neq 0$. 若 $l = k$, 则 $l = t = k$, 于是

$$D_0' = a_{ll}x_l\partial_l + \sum_{i=l+1}^m \sum_{j=l}^m a_{ij}x_i\partial_j.$$

所以, $\rho(D_0') = -(a_{ll}E_{ll} + \sum_{i=l+1}^m \sum_{j=l}^m a_{ij}E_{ji})$, 其中 E_{ji} 是 s 阶阵, 它的 (k,l) 位置元素是 $\delta_{jk}\delta_{il}$, $\forall\ j,i \in Y$. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 利用等式 $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ 可算得, 矩阵 $(\rho(D_0'))^n$ 具有形状: $(-1)^n a_{ll}^n E_{ll} + \sum_{i-l+1}^m \sum_{j=l}^m b_{ji}E_{ji}$, 其中 $b_{ji} \in \mathbb{F}$. 由 $a_{ll} \neq 0$ 知 $\rho(D_0')$ 不是幂零阵. 因为 $\rho(D_0) = \mathrm{diag}(\rho(D_0'), \rho(D_0''))$, 所以 $\rho(D_0)$ 不是幂零阵. 由引理 3.6, $D \notin \mathrm{qn}(L)$,

此与 $D\in T$ 矛盾. 若 $l<k$, 则

$$D_0=\sum_{j=t}^{k}a_{lj}x_l\partial_j+\sum_{i=l+1}^{m}\sum_{j=t}^{m}a_{ij}x_i\partial_j+D_0''.$$

令 $E=[D_0,x_k\partial_l]$, 则可算得

$$E=a_{lk}x_lD_l-\sum_{j=t}^{k}a_{lj}x_k\partial_j+\sum_{i=l+1}^{m}a_{ik}x_i\partial_l.$$

由于 $a_{lk}\neq 0$, 同理可算得 $\rho(E)$ 不是幂零阵. 故 $E\notin \mathrm{qn}(L)$. 由 $[D,x_k\partial_l]=E+[D_1,x_k\partial_l]$ 以及引理 3.6 知,$[D,x_k\partial_l]\notin \mathrm{qn}(L)$. 所以 $D\notin\Omega$, 此为矛盾.

(ii) $l>t$ 的情形. 令 $r=\max\{i\mid a_{it}\neq 0,i\in Y_0\}$. 则 $t<l\leq r\leq m$, 并且

$$D_0'=\sum_{i=l}^{m}\sum_{j=t}^{m}a_{ij}x_i\partial_j=\sum_{i=l}^{r}a_{it}x_i\partial_t+\sum_{i=l}^{m}\sum_{j=t+1}^{m}a_{ij}x_i\partial_j.$$

令 $H=[D_0,x_t\partial_r]$, 则 $H=-a_{rt}x_t\partial_t+\sum_{i=l}^{r}a_{it}x_i\partial_r-\sum_{j=t+1}^{m}a_{rj}x_t\partial_j$. 由于 $a_{rt}\neq 0$, 同理可推得 $\rho(H)$ 不是幂零阵. 因此 $H\notin \mathrm{qn}(L)$. 由 $[D,x_t\partial_r]=H+[D_1,x_t\partial_r]$ 以及引理 3.6, 可得 $D\notin\Omega$, 亦为矛盾.

假设 $D_0'=0$, $D_0''\neq 0$, 相仿于前面证明, 也可推得矛盾. 这就证明了 $D_0=0$. 于是 $D=D_1\in L_1\cap L_{\bar{0}}$. 所以 $\Omega\subseteq L_1\cap L_{\bar{0}}$. 故 $L_1\cap L_{\bar{0}}=\Omega$, 从而 $L_1\cap L_{\bar{0}}$ 是不变的. □

引理 3.12 $[L_{\bar{1}},L_1\cap L_{\bar{0}}]=L_0\cap L_{\bar{1}}$.

证明 显然 $[L_{\bar{1}},L_1\cap L_{\bar{0}}]\subseteq L_0\cap L_{\bar{1}}$, 下面证明反包含关系. 我们讨论 $L=\overline{\mathrm{S}}$ 的情形. 任取 $D\in\overline{\mathrm{S}}_0\cap\overline{\mathrm{S}}_{\bar{1}}$, 则可设 $D=\sum_{i,j\in Y}a_{ij}D_{ij}(f_{ij})$, 其中 $D_{ij}(f_{ij})\in\overline{\mathrm{S}}_0\cap\overline{\mathrm{S}}_{\bar{1}}$. 我们往证 $D\in[\overline{\mathrm{S}}_{\bar{1}},\overline{\mathrm{S}}_1\cap\overline{\mathrm{S}}_{\bar{0}}]$, 只需证 $D_{ij}(f_{ij})\in[\overline{\mathrm{S}}_{\bar{1}},\overline{\mathrm{S}}_1\cap\overline{\mathrm{S}}_{\bar{0}}]$. 设 $f_{ij}=\sum_{\alpha,u}a_{\alpha,u}x^{(\alpha)}x^u$ (可以是无限和), $a_{\alpha,u}\in\mathbb{F}$. 因为 D_i,D_j 是连续的, 故线性映射 $D_{ij}:\mathcal{U}\to\overline{\mathrm{S}}$ 是连续的, 所以 $D_{ij}(f_{ij})=\sum_{\alpha,u}a_{\alpha,u}D_{ij}(x^{(\alpha)}x^u)$. 于是归结为证明 $D_{ij}(x^{(\alpha)}x^u)\in[\overline{\mathrm{S}}_{\bar{1}},\overline{\mathrm{S}}_1\cap\overline{\mathrm{S}}_{\bar{0}}]$, 其中 $|\alpha|+|u|>1$. 若 $\{u\}\neq Y_1$, 取 $k\in Y_1\backslash\{u\}$, 则 $D_{ij}(x^{(\alpha)}x^u)=[\partial_k,D_{ij}(x^{(\alpha)}x_kx^u)]\in[\overline{\mathrm{S}}_{\bar{1}},\overline{\mathrm{S}}_1\cap\overline{\mathrm{S}}_{\bar{0}}]$. 设 $\{u\}=Y_1$. 若 $i\in Y_0,j\in Y_1$, 取 $l\in Y_0\backslash\{i\}$, 则有

$$D_{ij}(x^{(\alpha)}x^u)=[D_{li}(x_lx_j),D_{ij}(x_ix^{(\alpha)}\partial_j(x^u))]\in[\overline{\mathrm{S}}_{\bar{1}},\overline{\mathrm{S}}_1\cap\overline{\mathrm{S}}_{\bar{0}}].$$

若 $i,j\in Y_1$, 取 $k,l\in Y_0,k\neq l$. 则有

$$D_{ij}(x^{(\alpha)}x^u)=[D_{li}(x_lx_j),D_{kj}(x_kx^{(\alpha)}\partial_j(x^u))]\in[\overline{\mathrm{S}}_{\bar{1}},\overline{\mathrm{S}}_1\cap\overline{\mathrm{S}}_{\bar{0}}].$$

若 $i,j\in Y_0$, 取 $k\in Y_1$, 则

$$D_{ij}(x^{(\alpha)}x^u)=[D_{ji}(x_jx_k),D_{ij}(x_ix^{(\alpha)}\partial_k(x^u))]\in[\overline{\mathrm{S}}_{\bar{1}},\overline{\mathrm{S}}_1\cap\overline{\mathrm{S}}_{\bar{0}}].$$

当 $L=\overline{\mathrm{W}}$ 时, 证明相仿, 并且稍有简单, 我们略去证明. □

定理 3.13 L 的自然滤过是不变的.

证明 由命题 3.11 知 $L_1 \cap L_{\bar{0}}$ 是不变的, 所以 $[L_{\bar{1}}, L_1 \cap L_{\bar{0}}]$ 是不变的. 由引理 3.12, $L_0 \cap L_{\bar{1}}$ 是不变的. 由命题 3.10 知 $L_0 \cap L_{\bar{0}}$ 是不变的, 所以 $L_0 = L_0 \cap L_{\bar{1}} + L_0 \cap L_{\bar{0}}$ 是不变的. 因为 $L_i = \{x \in L |\ [x, L] \subseteq L_{i-1}\}$, $i \geq 1$, 所以 L_i 是不变的, $\forall\ i \geq -1$. □

下面我讨论 L 的自同构与它的底代数 $\mathcal{U}$ 的自同构的关系.

引理 3.14 设 $\mathrm{Aut}L$ 是 L 的自同构群. 任取 $\phi \in \mathrm{Aut}L$, 则

(i) ϕ 是连续自同构;

(ii) 存在 $L_{[-1]}$ 的基底 $\{E_1, \ldots, E_s\}$, 使得 $\phi(\partial_i) \equiv E_i \pmod{L_0}$.

证明 (i) 由定理 3.13 知, 对任意 $i \geq -1$, 有 $\phi(L_i) \subseteq L_i$, 故 $L_i \subseteq \phi^{-1}(L_i)$. 由 $\phi^{-1} \in \mathrm{Aut}L$ 知 $\phi^{-1}(L_i) \subseteq L_i$, 所以 $\phi^{-1}(L_i) = L_i$. 因此 ϕ 是连续的.

(ii) 由定理 3.13, ϕ 诱导了空间 L/L_0 的自同构 ψ, 使得 $\psi(D + L_0) = \phi(D) + L_0$, $\forall D \in L$. 因为 $\{\partial_i + L_0 |\ i \in Y\}$ 是 L/L_0 的 $\mathbb{F}$ - 基底, 所以 $\{\phi(\partial_i) + L_0 |\ i \in Y\}$ 是 L/L_0 的 $\mathbb{F}$ - 基底. 由 $L = L_{[-1]} \oplus L_0$ 知, 存在 $E_i \in L_{[-1]}$, 使得 $\phi(\partial_i) + L_0 = E_i + L_0$, $\forall i \in Y$. 显然 $\{E_i \mid i \in Y\}$ 是 $L_{[-1]}$ 的 $\mathbb{F}$ - 基底, 并且 $\phi(\partial_i) \equiv E_i \pmod{L_0}$, $\forall\ i \in Y$. □

命题 3.15 设 $\phi, \psi \in \mathrm{Aut}L$. 若 $\phi|_{L_{[-1]}} = \psi|_{L_{[-1]}}$, 则 $\phi = \psi$.

证明 我们对 i 用归纳法证明 $\phi|_{L_{[i]}} = \psi|_{L_{[i]}}$, $\forall\ i \geq -1$. 设 $D \in L_{[k]}$, 这里 $k \geq 0$. 令 $h = \phi(D) - \psi(D)$. 由已知 $\phi(\partial_i) = \psi(\partial_i)$, 故

$$[h, \psi(\partial_i)] = [\phi(D) - \psi(D), \psi(\partial_i)] = \phi([D, \partial_i]) - \psi([D, \partial_i]).$$

由归纳假设有 $\phi([D, \partial_i]) = \psi([D, \partial_i])$, 所以 $[h, \psi(\partial_i)] = 0, \forall\ i \in Y$. 由引理 3.14, 存在 $L_{[-1]}$ 的 $\mathbb{F}$ - 基底 $\{E_1, \ldots, E_s\}$, 使得 $\psi(\partial_i) = E_i + z_i$, 其中 $z_i \in L_0$, $\forall\ i \in Y$. 故 $[h, E_i + z_i] = 0, \forall i \in Y$. 设 $E_i = \sum_{l \in Y} a_{il}\partial_l, a_{il} \in \mathbb{F}$, 则 $\sum_{l \in Y} a_{il}[h, \partial_l] = [h, -z_i], \forall\ i \in Y$. 因为 $\{E_i\}$ 与 $\{\partial_l\}$ 都是 $L_{[-1]}$ 的 $\mathbb{F}$ - 基底, 故 $\det[a_{il}] \neq 0$. 于是

$$[h, \partial_l] = [h, u_l],\ \forall\ l \in Y. \tag{3.5}$$

由 $z_i \in L_0$ 知 $u_l \in L_0$. 因为 $D \in L_0$, 所以由定理 3.13 知 $h = \phi(D) - \psi(D) \in L_0$. 设 $h = \sum_{j=0}^{t} h_j$, 其中 $h_j \in L_{[j]}$. 利用 (3.5) 式与 $u_l \in L_0$ 可推得 $[h, \partial_l] \in L_0$, 于是 $[h_0, \partial_l] \in L_0 \cap L_{[-1]} = 0$, $\forall\ l \in Y$. 所以 $h_0 \in L_{[-1]}$, 从而 $h_0 \in L_{[-1]} \cap L_{[0]} = 0$, 并且 $h = \sum_{j=1}^{t} h_j$. 同理再由 (3.5) 式可得 $h_j = 0,\ j = 1, \cdots, t$, 故 $\phi(D) - \psi(D) = h = 0$, 所以 $\phi\,|_{L_{[k]}} = \psi\,|_{L_{[k]}}$. 由引理 3.14 知 ϕ 与 ψ 是连续的, 故 $\phi = \psi$. □

若 X 是 $\mathcal{U}$ 的子集, 则令 $\mathrm{M}_s(X)$ 表示 X 上所有 s 阶矩阵的集合. 显然 $\mathcal{U} = \mathbb{F} \oplus \mathcal{U}_1$. 令 pr 表示 $\mathcal{U}$ 到 $\mathbb{F}$ 上的投影. 对任意 $y \in \mathcal{U}$, 以下总设 $\overline{y} = \mathrm{pr}(y)$. 若 $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_s(\mathcal{U})$, 则令 $\overline{A} = [\overline{a}_{ij}]$. 仍记 $\mathrm{P}(m) = \mathbb{F}[[x_1, \cdots, x_m]]$, 则 $\mathrm{P}(m) \subset \mathcal{U}$. 设 $\mathrm{P}(m)_1 = \{y \in \mathrm{P}(m) \mid \mathrm{pr}(y) = 0\}$.

引理 3.16 以下诸结论成立.

(i) 设 $y \in \mathcal{U}$, 若 $\overline{y} \neq 0$, 则 y 是可逆元.

(ii) 设 $A = \overline{A} + B$, 其中 $B \in \mathrm{M}_s(\mathrm{P}(m)_1)$. 若 $\overline{A}$ 是 $\mathbb{F}$ 上可逆阵, 则 A 是可逆阵.

(iii) 设 $T = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(\alpha)}x^u \mid \exists i \in Y : \partial_i(x^u) \neq 0\}$. 若 $C \in \mathrm{M}_s(T)$, 则 $I + C$ 是可逆阵.

(iv) 设 $A \in \mathrm{M}_s(\mathcal{U})$, 则 $\overline{A}$ 是可逆阵当且仅当 A 是可逆阵.

证明 (i) 若 $\overline{y} \neq 0$, 可设 $y = k + a$, 其中 $0 \neq k \in \mathbb{F}, a \in \mathcal{U}_1$. 令 $z = k^{-1}(\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i a_1^i)$, 其中 $a_1 = k^{-1}a$, 则 $yz = zy = 1$.

(ii) 因为 P(m) 是交换环, 所以 $\det A$ 有意义. 由已知, $\overline{\det A} = \det \overline{A} \neq 0$, 由 (i) 知 $\det A$ 是可逆元, 故 A 是可逆阵.

(iii) 因为 T 中任意 $n+1$ 个元素之积均为零, 所以 C 是幂零阵. 于是 $I + C$ 是可逆阵.

(iv) 设 $\overline{A}$ 是可逆阵. 显然 $A = \overline{A} + B + C$, 其中 $B \in \mathrm{M}_s(\mathrm{P}(m)_1)$, $C \in \mathrm{M}_s(T)$. 由 (ii) 知 $\overline{A} + B$ 是可逆阵, 设 D 是它的逆阵. 因为 $C \in \mathrm{M}_s(T)$, 故 $CD \in \mathrm{M}_s(T)$. 由 (iii) 知 $I + CD$ 是可逆阵. 设 E 是 $I + CD$ 的逆阵. 令 $H = DE$, 则

$$\begin{aligned} AH =& ADE = (\overline{A} + B + C)DE \\ =& ((\overline{A} + B)D + CD)E = (I + CD)E = I. \end{aligned}$$

同理 $HA = I$. 故 A 是可逆阵. 必要性得证. 利用 $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$ 即可证得充分性. □

设 $\mathrm{Aut}\,\mathcal{U}$ 为 $\mathcal{U}$ 的所有连续自同构的群.

引理 3.17 设 $\phi \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{U}$, $E_i = \phi(\partial_i)$, $\forall\, i \in Y$. 则 $\{E_i \mid i \in Y\}$ 是 $\mathcal{U}$ - 模 $\overline{W}$ 的自由基.

证明 设 $E_i = \sum_{j \in Y} c_{ij}\partial_j$, 其中 $c_{ij} \in \mathcal{U}, i \in Y$, 则 $c_{ij} = \overline{c}_{ij} + c'_{ij}$, 其中 $\overline{c}_{ij} \in \mathbb{F}, c'_{ij} \in \mathcal{U}_1$. 若 $\det(\overline{c}_{ij}) = 0$, 则存在不全为零的元素 $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{F}$, 使得 $\sum_{i \in Y} a_i \overline{c}_{ij} = 0, \forall\, j \in Y$. 所以 $\sum_{i \in Y} a_i c_{ij} \in \mathcal{U}_1, \forall j \in Y$. 显然 $\sum_{i \in Y} a_i \partial_i \notin L_0$. 但是

$$\phi(\sum_{i \in Y} a_i \partial_i) = \sum_{i \in Y} a_i E_i = \sum_{i \in Y} a_i \left(\sum_{j \in Y} c_{ij}\partial_j\right) = \sum_{j \in Y}\left(\sum_{i \in Y} a_i c_{ij}\right)\partial_j \in L_0.$$

此与定理 3.13 矛盾, 所以 $\det(\overline{c}_{ij}) \neq 0$. 由引理 3.16 (iv) 知 $[c_{ij}]$ 是可逆阵. 设 $[d_{ij}] = [c_{ij}]^{-1}$, 则 $\partial_i = \sum_{j \in Y} d_{ij}E_j$. 利用 $\{\partial_i \mid i \in Y\}$ 是 $\overline{W}$ 的自由基以及 $[d_{ij}]$ 是可逆阵可推得 $\{E_i \mid i \in Y\}$ 也是 $\overline{W}$ 的自由基. □

引理 3.18 设 $\{y_j \mid j \in Y\} \subseteq \mathcal{U}_1$. 若 $[\partial_i(y_j)]$ 是可逆阵, 则存在 $\sigma \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{U}$, 使得 $\sigma(x_i) = y_i$, $i \in Y$.

证明 令 $\sigma(x^{(\alpha)}x^u) = y^{(\alpha)}y^u$, 其中 $y^{(\alpha)}y^u$ 如 (3.2) 式所定义, 则 σ 可扩充为 $\mathcal{U}$ 的连续自同态. 显然 $\sigma(x_i) = y_i, \forall\, i \in Y$. 因为 $y_j \in \mathcal{U}_1$, $\forall\, j \in Y$, 所以 $\sigma(\mathcal{U}_i) \subseteq \mathcal{U}_i$. 于是 σ 诱导了线性空间 $\mathcal{U}_i/\mathcal{U}_{i+1}$ 的自同态 σ_i, $\forall\, i \in \mathbb{N}$.

设 $a_{ij} = \overline{\partial_i(y_j)}$, $y_j = y'_j + y''_j$, 其中 $y'_j \in \mathcal{U}_{[1]}, y''_j \in \mathcal{U}_2$, 则 $\partial_i(y'_j) = \overline{\partial_i(y_j)} = a_{ij}$, 从而 $y'_j = \sum_{i \in Y} a_{ij}x_i$, $\forall\, j \in Y$. 由 $[\partial_i(y_j)]$ 是可逆阵及引理 3.16 (iv) 知 $[a_{ij}]$ 是 $\mathbb{F}$ 上的可逆阵. 设 $[c_{ij}] = [a_{ij}]^{-1}$, 则有

$$x_j = \sum_{i \in Y} c_{ij}y'_i = \sum_{i \in Y} c_{ij}(y_i - y''_i) = \sigma\left(\sum_{i \in Y} c_{ij}x_i\right) - \sum_{i \in Y} c_{ij}y''_i.$$

设 $h_j = \sum_{i\in Y} c_{ij}x_i$, 由上式知 $\sigma(h_j) = x_j + z_j$, 其中 $z_j \in \mathcal{U}_2$, $\forall\ j \in Y$. 任取 $x^{(\alpha)}x^u = (\prod_{j=1}^m x_j^{\alpha_j})(\prod_{t=1}^k x_{i_t}) \in \mathcal{U}_i$. 令 $h = (\prod_{j=1}^m h_j^{\alpha_j})(\prod_{t=1}^k h_{i_t})$, 则 $h \in \mathcal{U}_i$. 易见

$$\sigma(h) = \left(\prod_{j=1}^m (x_j + z_j)^{\alpha_j}\right)\left(\prod_{t=1}^k (x_{i_t} + z_{i_t})\right) = x^{(\alpha)}x^u + z,$$

其中 $z \in \mathcal{U}_{i+1}$. 故 $\sigma_i(h + \mathcal{U}_{i+1}) = x^{(\alpha)}x^u + \mathcal{U}_{i+1}$. 所以 σ_i 是满射,$\forall\ i \in Y$. 因为 $\mathcal{U}_i/\mathcal{U}_{i+1}$ 是有限维的, 故 σ_i 是双射,$\forall\ i \in Y$.

令 $y \in \ker\sigma$, 可设 $y \in \mathcal{U}_i$. 由 $\sigma(y) = 0$ 知 $\sigma_i(y + \mathcal{U}_{i+1}) = 0$. 因 σ_i 是单的, 故 $y \in \mathcal{U}_{i+1}$. 所以 $\ker\sigma \subseteq \bigcap_{j=i}^\infty \mathcal{U}_j = 0$, 于是 σ 是单的. 任取 $x \in \mathcal{U}$, 则 $x = a + x_1$, 其中 $a \in \mathbb{F}, x_1 \in \mathcal{U}_1$. 因 σ_1 是满的, 故存在 $y_1 \in \mathcal{U}_1$, 使得 $\sigma_1(y_1 + \mathcal{U}_2) = x_1 + \mathcal{U}_2$, 因而 $x_2 := x_1 - \sigma(y_1) \in \mathcal{U}_2$. 因为每个 σ_i 都是满的, 所以可归纳地取到 y_i 与 x_{i+1}, 使得 $x_{i+1} := x_i - \sigma(y_i) \in \mathcal{U}_{i+1}$, 其中 $i \in \mathbb{N}, y_i \in \mathcal{U}_i$. 设 $y = a + \sum_{i=1}^\infty y_i$. 因 σ 是连续的, 所以

$$\sigma(y) = \sigma(a) + \sum_{i=1}^\infty \sigma(y_i) = a + \sum_{i=1}^\infty (x_i - x_{i+1}) = a + x_1 = x.$$

因此 σ 是满的, 于是 $\sigma \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{U}$. 引理得证. □

设 $\sigma \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{U}$, 则 σ 诱导了 $\mathrm{der}\mathcal{U}$ 的一个连续自同构 $\tilde{\sigma} : D \mapsto \sigma D\sigma^{-1}$, $\forall D \in \mathrm{der}\mathcal{U}$. 若 $\tilde{\sigma}(L) \subseteq L$, 则称 σ 关于 L 是可许的. 令 $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}, L)$ 是所有关于 L 可许的 $\mathcal{U}$ 的连续自同构的集合, 则 $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}, L)$ 是 $\mathrm{Aut}\,\mathcal{U}$ 的子半群.

定理 3.19 $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}, L) \cong \mathrm{Aut}L$. *从而* $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}, L)$ *是群, 并且* L *的每个自同构都是由* $\mathcal{U}$ *的连续自同构所诱导的.*

证明 设 $\psi : \mathrm{Aut}(\mathcal{U}, L) \to \mathrm{Aut}L$, 使得 $\psi(\sigma) = \tilde{\sigma}|_L$, 则 ψ 是半群的同态. 我们先证 ψ 是满的. 任取 $\phi \in \mathrm{Aut}L$. 对任意 $j \in Y$, 存在 $k_j \in Y$, 使得 $x_j\partial_{k_j} \in L$. 设 $E_i = \phi(\partial_i), \forall\ i \in Y$. 由引理 3.17 可设 $\phi(x_j\partial_{k_j}) = \sum_{t\in Y} a_{jt}E_t$. 由定理 3.13 知 $a_{jt} \in \mathcal{U}_1$. 因为 $[E_i, E_t] = \phi[\partial_i, \partial_t] = 0$, 所以

$$\begin{aligned}\delta_{ij}E_{k_j} &= \phi(\delta_{ij}\partial_{k_j}) = \phi([\partial_i, x_j\partial_{k_j}]) \\ &= \left[E_i, \sum_{t\in Y} a_{jt}E_t\right] = \sum_{t\in Y} E_i(a_{jt})E_t.\end{aligned}$$

由引理 3.17 知 $E_i(a_{jk_j}) = \delta_{ij}$. 设 $y_j = a_{jk_j}$, 则 $y_j \in \mathcal{U}_1$, 并且 $E_i(y_j) = \delta_{ij}$. 设 $E_i = \sum_{j\in Y} c_{ij}\partial_j$, 则有矩阵等式 $[c_{ij}][\partial_i(y_j)] = [E_i(y_j)] = I$. 于是 $[\overline{c_{ij}}][\overline{\partial_i(y_j)}] = I$, 故 $[\overline{\partial_i(y_j)}]$ 是 $\mathbb{F}$ 上可逆阵. 由引理 3.16 (iv) 知 $[\partial_i(y_j)]$ 是可逆阵, 由引理 3.18 知存在 $\sigma \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{U}$, 使得 $\sigma(x_j) = y_j, \forall\ j \in Y$. 于是

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(\partial_i)(y_j) &= \sigma\partial_i\sigma^{-1}(y_j) = \sigma\partial_i(x_j) \\ &= \delta_{ij} = E_i(y_j) = \phi(\partial_i)(y_j), \quad \forall\ i, j \in Y.\end{aligned}$$

因为 $\sigma \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{U}$, 所以 $\{y_j \mid j \in Y\}$ 是 $\mathcal{U}$ 的生成系. 于是 $\widetilde{\sigma}(\partial_i) = \phi(\partial_i), \forall\, i \in Y$, 故 $\widetilde{\sigma}\,|_{L_{[-1]}} = \phi\,|_{L_{[-1]}}$. 由命题 3.15 知 $\widetilde{\sigma}\,|_L = \phi$, 所以 $\psi(\sigma) = \phi$. 因此 ψ 是满射.

设 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{U}, L)$. 若 $\widetilde{\sigma}\,|_L = \mathrm{id}_L$, 则 $\widetilde{\sigma}(\partial_j) = \partial_j$, $\forall\, j \in Y$. 所以 $\sigma\partial_j(x_i) = \partial_j\sigma(x_i)$, 于是 $\partial_j\sigma(x_i) = \delta_{ij}$, $\forall\, i, j \in Y$. 因此 $\sigma(x_i) = x_i$, $\forall\, i \in Y$. 由 $\{x_i \mid i \in Y\}$ 是生成系并且 σ 连续, 故 $\sigma = \mathrm{id}_{\mathcal{U}}$. 所以 ψ 是单射. 这就证明了 ψ 是同构映射. □

利用 $\overline{W} = \mathrm{der}\mathcal{U}$ 可推得 $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}, \overline{W}) = \mathrm{Aut}\,\mathcal{U}$. 则有

推论 3.20 $\mathrm{Aut}\overline{W} \cong \mathrm{Aut}\,\mathcal{U}$.

参 考 文 献

[1] N. B. Backhouse. The Killing form for graded Lie algebras. J. Math. Phys., 1997(18): 239~244

[2] G. M. Benkart and J. M. Osborn. Representations of rank one Lie algebras of characteristic p. Lie algebras and Related Topics (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 933), New York: Springer-Verlag, 1982, 1~37

[3] R. J. Blatter, Induced and produced representations of Lie algebra. Trans. Amer. Math. Soc., 1969(144): 457~474

[4] R. E. Block and R. L. Wilson. On filtered Lie algebras and divided power algebras. Comm. Algebra, 1975(3): 571~589

[5] R. E. Block and R. L. Wilson. The simple Lie p-algebras of rank 2. Ann. Math., 1982, 2(115): 93~168

[6] R. E. Block and R. L. Wilson. The restricted simple Lie algebras are of classical or Cartan type. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1984, 5271~5274

[7] R. E. Block and R. L. Wilson. Classification of the restricted simple Lie algebras. J. Algebra, 1988(114): 115~259

[8] R. E. Block and H. Zassenhaus. The Lie algebras with a non-degenerate trace form. Illinois J. Math., 1964(8): 543~549

[9] M. J. Celousov. Derivations of Lie algebras of Cartan type. Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Mathcmatika, 1970(98): 126~134[Russian]

[10] E. Celeghini and P. P. Kulish. Twist deformation of rank one Lie superalgebras. J. Phys., A: Math. Gen., 1998(31): 79~84

[11] A. Eldugue. Lie superalgebras with semisimple even part. J. Algebra, 1996(183): 649~663

[12] J. B. Ermolaev. Simple graded Lie algebras. Soviet Math. (Izv. VUZ), 1980, 24(5): 93~98

[13] R. Farnsteiner. The associative forms of the graded Cartan type Lie algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 1986(295): 417~427

[14] R. Farnsteiner. Dual space derivations and $H^2(L, F)$ of modular Lie algebras. Canad. J. Math., 1987(39): 1078~1106

[15] R. Farnsteiner. Central extensions and invariant forms of graded Lie algebras. Algebras, Groups Gem. 1986(3): 431~451

[16] Fei, Q. Y. On new simple Lie algebras of Shen Guangyu. Chin. Ann. Math., 1989, 10(4): 448~457

[17] A. N. Grishkov. Irreducible representations of modular Lie algebras. Math. Notes, 1981(30): 496~499

[18] I. Hayashi. Embedding and existence theorems of infinite Lie algebra. J. Math. Soc. Japan, 1970(22): 1~14

[19] R. R. Holmes. Simple restricted module for restricted contact Lie algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1992, 166(2): 329~337

[20] G. P. hochschild. Representations of restricted Lie algebras of characteristic p. Proc. Amer. Math. Soc., 1954(5): 603~605

[21] Hu, N. H. The graded modules for graded contact Cartan algebras. Comm. Algebra, 1994, 22(11): 4475~4497

[22] Hu, N. H. Irreducible constituents of graded modules for graded contact Lie algebras of Cartan type. Comm. Algebra, 1994, 22(14): 5951~5971

[23] J. E. Humphreys. Introduction to Lie Alegebras and Representation Theory. Springer-Verlay. New York, 1972

[24] N. Jacobson. Lie Algebras. New York, 1962

[25] Jiang, C. B. and Meng, D. J. Vertex representations for the $v+1$ toroidal Lie algebra of type B_ℓ. J. Algebra, 2001(246): 564~593

[26] V. G. Kac. Description of filtered Lie algebras with which graded Lie algebras of Cartan type are associated. Math. USSR-Izv, 1974(8): 801~835 (Errata 1976(10): 1339)

[27] V. G. Kac. Lie superalgebras. Adv. Math., 1977(26): 8~96

[28] V. G. Kac. Representations of classical Lie superalgebras. Lecture Notes in Mathematic, 1977(676): 579~626

[29] V. G. Kac. Classification of infinite-dimensional simple linearly compact Lie superalgebras. Advances in Math., 1998(139): 1~55

[30] N. A. Koreshkov. On the irreducible representations of a Lie algebra W_2. Soviet math. (Izv. VUZ), 1980(24): 44~52

[31] A. I. Kostrikin and I. R. Shafarevic. Graded Lie algebras of finite characteristic. Math. USSR-Izv., 1969(3): 237~304

[32] M. I. Kuznetsov. Graded Lie algebras with zero component containing a sum of commuting ideals. Mat. Sb. (N.S.), 1981, 116(158): 568~578

[33] C. Lee. Contruction of modules for Lie superalgebras of type C. J. Algebra, 1995(176): 249~264

[34] D. A. Leites. New Lie superalgbras and mechanics. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 1977, 236(4): 804~807. English translation: Soviet Math. Dakl., 1977, 18(5): 1277~1280

[35] D. A. Leites. Automorphisms and real forms of simple Lie superalgebras of formal vector fields. Problem in group theory and homological algebra, 1983(139): 126~128

[36] Liu, W. D. Zhang, Y. Z. and Wang, X. L. The derivation algebra of the Cartan-type Lie superalgebra HO. J. Algebra, 2004(273): 176~205

[37] Liu, W. D. and Zhang, Y. Z. Infinite-dimensional modular odd hamiltonian Lie superalgebras. Comm. Algebra, 2004, 32(6): 2341~2357

[38] Meng, D. J. Some results on complete Lie algebras. Comm. Algebra, 1994(22): 5457~5507

[39] J. Milnor and J. Moore. On the structure of Hopf algebras. Ann. Math., 1965(81): 211~264

[40] I. M. Musson. On the center of enveloping algebra of a classical simple Lie superalgebra. J. Algebra, 1997(193): 75~101

[41] B. R. McDonld. Linear Algebra over Commutative Rings. Pure Appl. Math., New York: Dekker, 1984

[42] V. M. Petrogradski. Identities in the enveloping algebras for modular Lie superalgebras. J. Algebra, 1992(145): 1~21

[43] A. N. Panov. Irreducible representations of the Lie algebras $sl(n)$ over a field of positive characteristic. Mat. Sb., 1985(128): 21~34[Russian]

[44] A. A. Premet. Algebraic groups associated with Lie p-algebras of Cartan type. Math. USSR-Sb., 1985(50): 85~97

[45] R. Ree. On generalized Witt algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 1956(83): 510~546

[46] M. Scheunert. Theory of Lie superalgebras. Lecture Notes in Math. Springer-Verlay, 1979, 716

[47] G. B. Seligman. Modular Lie algebras. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg and New York, 1967

[48] H. Shakibi. Composition factors of the Kac module for the Lie superalgebras $sl(3/3)$ and $sl(r/r)$. Comm. Algebra, 1993(9): 3099~3126

[49] H. Shakibi. Infinite and finite dimensional representations of the Lie superalgebra $sl(m/n)$. Comm. Algebra, 1994(3): 951~967

[50] H. Shakibi. A character formula for infinite dimensional representations of type 1 Lie superalgebras $sl(m/n)$ and $C(2)$. Comm. Algebra, 1995(7): 2429~2452

[51] Shen, G. Y. An intrinsic property of Lie algebra $K(m, \underline{n})$. Chin. Ann. Math., 1981(2): 105~115

[52] Shen, G. Y. On Lie algebras associated with nodal noncommutative Jordan algebras. Acta Math. Sinica, 1986, 2(1): 14~24

[53] Shen, G. Y. Graded modules of graded Lie algebras of Cartan type. (III)-Irreducible modules. Chin. Ann. Math., 1988 9(4): 404~417

[54] Shu, B. The generalized representations of graded Lie algebras of Cartan type. J. Algebra, 1997(194): 157~177

[55] Shu, B. Generalized restricted Lie algebras and representations of the Zassenhaus algebra. J. Algebra, 1998(204): 549~572

[56] H. Strade and R. Farnsteiner. Modular Lie Algebras and Their Representations. Marcel Dekker Textbooks and Monographs: New York, 1988

[57] H. Strade. The classification of the simple modular Lie algebras: IV. Determining the associated graded algebra. Ann. Math., 1993(138): 1~59

[58] Su, Y. C. Classification of finite dimensional modules of the Lie superalgebra $sl(2/1)$. Comm. Algebra, 1992(20): 3259~3278

[59] Su, Y. C. Derivation and structure of the Lie algebras of Xu type. Manuscripta Math., 2001(105): 483~500

[60] Wang, Y. and Zhang, Y. Z. The associative forms of the graded Cartan type Lie superalgebras. Chinese Adv. Math., 2000, 29(1): 65~70

[61] R. L. Wilson. Classification of generalized Witt algebras over algebraically closed fields. Trans. Amer. Math. Soc., 1971(153), 191~210

[62] R. L. Wilson. Automorphisms of graded Lie algebras of Cartan type. Comm. Algebra, 1975(3), 591~613

[63] R. L. Wilson. A structural characterization of the simple Lie algebras of generalized Cartan type over fields of prime characteristic. J. Algebra, 1976(40): 418~465

[64] R. L. Wilson. Classification of the restricted simple Lie algebras with toral Cartan subalgebras. J. Algebra, 1983(83): 531~570

[65] D. J. Winter. Symmetric Lie algebras. J. Algebra, 1985(97): 130~165

[66] D. J. Winter. Generalized classical Albert-Zassenhaus algebras. J. Algebra, 1985(97): 180~200

[67] H. Zassenhaus. On the Cartan subalgebra of a Lie algebra. Linear Algebra Appl., 1983(52): 745~761

[68] E. I. Zelmanov. Lie algebra with finite gradations. Math. USSR–Sb. 1985(52): 347~385

[69] Zhao, K. M. Representations of the Virasoro Algebra. J. Algebra, 1995(176): 882~907

[70] Zhao, K. M. Isomorphisms between generalized Cartan type W Lie algebras in characteristic zero. Canadian J. Math, 1998(50): 210~224

[71] Zhang, Y. Z. Lie Algebra $K(m, \mu_j, \underline{m})$ of Cartan type of characteristic $p = 2$. Chin. Ann. Math., 1992, 13(3): 315~326

[72] Zhang, Y. Z. and Wang, Y. On the algebra $\overline{\Sigma}$ over characteristic two of Shen Guangyu. Acta Math. Scientia, 1996(16): 117~125

[73] Zhang, Y. Z. and Nan, J. Z. Finite dimensional Lie superalgebras $W(m, n, \underline{t})$ and $S(m, n, \underline{t})$. Chin. Adv. Math., 1998, 27(3): 240~246

[74] Zhang, Y. Z. and Fu, H. C. and Solomon A. I. Intermediate coherent-phase (PB) states of radiation fields and their nonclassical properties. Physics Letters A, 1999(263): 257~262

[75] Zhang, Y. Z. Z-Graded Lie superalgebras with depth one over fields of prime characteristic. Acta Math. Sinica, 2002, 18(4): 687~700

[76] Zhang, Y. Z. and Fu, H. C. Finite-dimensional Hamiltonian Lie superalgebras. Comm. Algebra, 2002, 30(6): 2651~2673

[77] Zhang, Y. Z. and Shen, G. Y. Embedding theorem of filtered Lie superalgebras. Acta Math. Scientia, 2001, 21(3): 401~411

[78] Zhang, Y. Z. and Liu, W. D. The general and special superalgebras of formal vector-fields. Science in China, Ser. A Math., 2004, 47(2): 272~283

[79] Zhang, Q. C. and Zhang, Y. Z. Derivation algebras of the modular Lie superalgebras W and S of Cartan type. Acta Math. Scientia, 2000, 20(1): 137~144

[80] Zhu, L. S. and Meng, D. J. The classification of complete Lie algebras with low dimensions. Alg. Colloquium, 1997(4): 95~109

[81] 金宁. 无限维 Cartan 型李代数的 ad- 幂零元、拟幂零元与不变滤过. 中国科学, A 辑, 1992, 22(7): 687~704

[82] 卢才辉. 带有非退化不变双线性型的有限维可解李代数. 数学学报, 1991, 34(1): 121~132

[83] 林磊. 素特征李代数概述. 数学进展, 1995, 24(1): 28~38

[84] 马凤敏, 张庆成. K 型模李超代数的导子代数. 数学杂志, 2000, 20(4): 431~435

[85] 孟道骥. 复半单李代数引论. 北京: 北京大学出版社, 1998

[86] 孟道骥, 朱林生, 姜翠波. 完备李代数. 北京: 科学出版社, 2001

[87] 邱森. 李代数的上同调群概述. 数学进展, 1990, 19(4): 411~424

[88] 沈光宇. 阶化 Cartan 型李代数的阶化模 (I)- 模的混合积. 中国科学, A 辑, 1986, 29(3): 255~264

[89] 沈光宇. 阶化 Cartan 型李代数的阶化模 (II)- 模的混合积. 中国科学, A 辑, 1986, 29(5): 449~457

[90] 舒斌. 交换环上限制 Cartan 型李代数的 Sandwich 子代数与自同构. 数学年刊, 1997, 18(A, 4): 433~436

[91] 舒斌. Cartan 型李代数的自同构群. 数学年刊, 1999, 20(A, 1): 47~52

[92] 孙洪洲, 韩其智. 李超代数综述. 物理学进展, 1983, 3(1): 81~125

[93] 孙洪洲, 韩其智. 李代数、李超代数及在物理中的应用. 北京: 北京大学出版社, 1999

[94] 万哲先, 李代数. 北京: 科学出版社, 1978

[95] 万哲先. Kac-Moody 代数导引. 北京: 科学出版社, 2002

[96] 王颖, 张永正. 限制李超代数的新定义. 科学通报, 1999, 44(8): 807~813

[97] 王颖, 孙大烈. 具有非退化迹型的 Z- 阶化李超代数. 数学杂志, 1999, 19(4): 397~400

[98] 薛连永. 关于特征 2 的 Cartan 型 p- 代数的过滤和不变性. 东北数学, 1986, 2(2): 150~163

[99] 严志达. 实半单李代数. 天津: 南开大学出版社, 1998

[100] 姚光同, 张永正. 一般域上无限矩阵李代数的 y- 型李子代数. 数学年刊, 2000, 21(A, 4): 387~394

[101] 张永正. 特征 $p = 2$ 的无限维 Cartan 型李代数 $K(m)$. 数学年刊, 1994, 15(A, 3): 345~351

[102] 张永正. 小特征的有限维 Cartan 型李代数的滤过. 数学年刊, 1995, 16(A,6): 729~735

[103] 张永正. Cartan 型 Z- 阶化李超代数 $W(n)$ 与 $S(n)$ 的阶化模. 科学通报, 1995, 40(20): 1829~1932

[104] 张永正. Cartan 型李超代数 $H(n)$ 的 Z- 阶化模. 科学通报, 1996, 41(7): 589～592

[105] 张永正, 林磊. 特征 $p = 2$ 的非交错的无限维哈米尔顿代数. 纯粹数学与应用数学, 1996, 12(1): 118～121

[106] 张永正. 素特征域上有限维的 Cartan 型李超代数. 科学通报, 1997, 42(6): 676～679

[107] 张永正. 无限维 Cartan 型李超代数的模的混合积. 数学年刊, 1997, 18(A, 6): 725～742

[108] 张永正, 沈光宇. Z- 阶化李超代数的嵌入定理. 中国科学, A 辑, 1998, 28(6): 500～507

[109] 张永正, 王颖, 张庆成. 模李超代数研究的若干进展. 数学进展, 2002, 31(6): 495～502

索　引

A～E

表示 5
标准 Cartan 子代数 168
不可缩滤过 100
不可约李超代数 6
超代数 1
超对称代数 126
超对称双线性型 110
超迹 123
除幂代数 11, 138
次数导子 53
单根系 168
导子 6
导子超代数 6

F～J

发散映射 37
泛包络代数 8
换位子代数 4
混合积 164
基本权 168
结合超代数 1
结合型 110
迹型 123

K～O

可迁的$\mathbb{Z}$-阶化李超代数 6
可许自同构 180
李超代数 2
理想 3
连续自同构 178
滤过 86
模 5
内导子 6
拟幂零元 174
偶的线性映射 4
偶 (奇) 的双线性映射 110

P～T

旗 146
伸张 162, 162
特殊导子 10, 12
特殊线性李超代数 145, 175
投影映射 31

U～Z

限制表示 136
限制李代数 136
限制李超代数 137
形式幂级数环 171
形式向量场的一般 (特殊) 李超代数 172
辛 - 正交李超代数 165
一般线性李超代数 5
张量代数 126
正规排列 77
自然滤过 86
自由代数 8

其　他

Cartan 型模李超代数 21, 25
Killing 型 125
$\mathbb{Z}$-阶化李超代数 6
$\mathbb{Z}_2$-阶化空间 1

《现代数学基础丛书》出版书目

（按出版时间排序）

1 数理逻辑基础（上册） 1981.1 胡世华、陆钟万 著
2 紧黎曼曲面引论 1981.3 伍鸿熙、吕以辇、陈志华 著
3 组合论（上册） 1981.10 柯召、魏万迪 著
4 数理统计引论 1981.11 陈希孺 著
5 多元统计分析引论 1982.6 张尧庭、方开泰 著
6 概率论基础 1982.8 严士健、王隽骧、刘秀芳 著
7 数理逻辑基础（下册） 1982.8 胡世华、陆钟万 著
8 有限群构造（上册） 1982.11 张远达 著
9 有限群构造（下册） 1982.12 张远达 著
10 环与代数 1983.3 刘绍学 著
11 测度论基础 1983.9 朱成熹 著
12 分析概率论 1984.4 胡迪鹤 著
13 巴拿赫空间引论 1984.8 定光桂 著
14 微分方程定性理论 1985.5 张芷芬、丁同仁、黄文灶、董镇喜 著
15 傅里叶积分算子理论及其应用 1985.9 仇庆久等 编
16 辛几何引论 1986.3 J.柯歇尔、邹异明 著
17 概率论基础和随机过程 1986.6 王寿仁 著
18 算子代数 1986.6 李炳仁 著
19 线性偏微分算子引论（上册） 1986.8 齐民友 著
20 实用微分几何引论 1986.11 苏步青等 著
21 微分动力系统原理 1987.2 张筑生 著
22 线性代数群表示导论（上册） 1987.2 曹锡华等 著
23 模型论基础 1987.8 王世强 著
24 递归论 1987.11 莫绍揆 著
25 有限群导引(上册) 1987.12 徐明曜 著
26 组合论（下册） 1987.12 柯召、魏万迪 著
27 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 1988.1 李忠 著
28 代数体函数与常微分方程 1988.2 何育赞 著
29 同调代数 1988.2 周伯壎 著
30 近代调和分析方法及其应用 1988.6 韩永生 著

31 带有时滞的动力系统的稳定性　1989.10　秦元勋等　编著
32 代数拓扑与示性类　1989.11　马德森著　吴英青、段海鲍译
33 非线性发展方程　1989.12　李大潜、陈韵梅　著
34 反应扩散方程引论　1990.2　叶其孝等　著
35 仿微分算子引论　1990.2　陈恕行等　编
36 公理集合论导引　1991.1　张锦文　著
37 解析数论基础　1991.2　潘承洞等　著
38 拓扑群引论　1991.3　黎景辉、冯绪宁　著
39 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组　1991.4　陈亚浙、吴兰成　著
40 黎曼曲面　1991.4　吕以辇、张学莲　著
41 线性偏微分算子引论（下册）　1992.1　齐民友　著
42 复变函数逼近论　1992.3　沈燮昌　著
43 Banach 代数　1992.11　李炳仁　著
44 随机点过程及其应用　1992.12　邓永录等　著
45 丢番图逼近引论　1993.4　朱尧辰等　著
46 线性微分方程的非线性扰动　1994.2　徐登洲　马如云　著
47 广义哈密顿系统理论及其应用　1994.12　李继彬、赵晓华、刘正荣　著
48 线性整数规划的数学基础　1995.2　马仲蕃　著
49 单复变函数论中的几个论题　1995.8　庄圻泰　著
50 复解析动力系统　1995.10　吕以辇　著
51 组合矩阵论　1996.3　柳柏濂　著
52 Banach 空间中的非线性逼近理论　1997.5　徐士英、李冲、杨文善　著
53 有限典型群子空间轨道生成的格　1997.6　万哲先、霍元极　著
54 实分析导论　1998.2　丁传松等　著
55 对称性分岔理论基础　1998.3　唐云　著
56 Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用　1998.10　乐茂华　著
57 半群的 S-系理论　1999.2　刘仲奎　著
58 有限群导引(下册)　1999.5　徐明曜等　著
59 随机模型的密度演化方法　1999.6　史定华　著
60 非线性偏微分复方程　1999.6　闻国椿　著
61 复合算子理论　1999.8　徐宪民　著
62 离散鞅及其应用　1999.9　史及民　编著
63 调和分析及其在偏微分方程中的应用　1999.10　苗长兴　著
64 惯性流形与近似惯性流形　2000.1　戴正德、郭柏灵　著
65 数学规划导论　2000.6　徐增堃　著

66 拓扑空间中的反例 2000.6 汪林、杨富春 编著
67 拓扑空间论 2000.7 高国士 著
68 非经典数理逻辑与近似推理 2000.9 王国俊 著
69 序半群引论 2001.1 谢祥云 著
70 动力系统的定性与分支理论 2001.2 罗定军、张祥、董梅芳 编著
71 随机分析学基础（第二版） 2001.3 黄志远 著
72 非线性动力系统分析引论 2001.9 盛昭瀚、马军海 著
73 高斯过程的样本轨道性质 2001.11 林正炎、陆传荣、张立新 著
74 数组合地图论 2001.11 刘彦佩 著
75 光滑映射的奇点理论 2002.1 李养成 著
76 动力系统的周期解与分支理论 2002.4 韩茂安 著
77 神经动力学模型方法和应用 2002.4 阮炯、顾凡及、蔡志杰 编著
78 同调论——代数拓扑之一 2002.7 沈信耀 著
79 金兹堡-朗道方程 2002.8 郭柏灵等 著
80 排队论基础 2002.10 孙荣恒、李建平 著
81 算子代数上线性映射引论 2002.12 侯晋川、崔建莲 著
82 微分方法中的变分方法 2003.2 陆文端 著
83 周期小波及其应用 2003.3 彭思龙、李登峰、谌秋辉 著
84 集值分析 2003.8 李雷 吴从炘 著
85 数理逻辑引论与归结原理 2003.8 王国俊 著
86 强偏差定理与分析方法 2003.8 刘文 著
87 椭圆与抛物型方程引论 2003.9 伍卓群、尹景学
88 有限典型群子空间轨道生成的格（第二版） 2003.10 万哲先、霍元极 著
89 调和分析及其在偏微分方程中的应用（第二版） 2004.3 苗长兴 著
90 稳定性和单纯性理论 2004.6 史念东 著
91 发展方程数值计算方法 2004.6 黄明游 编著
92 传染病动力学的数学建模与研究 2004.8 马知恩 周义仓 王稳地 靳 祯 著
93 模李超代数 2004.9 张永正 刘文德 著